

一种计算垂线偏差的抗差最小二乘严密解法*

杨浩 李宗春[†] 冉佳欢 刘忠贺 何华

(战略支援部队信息工程大学地理空间信息学院 郑州 450001)

摘要 针对当前利用大地水准面模型求解垂线偏差精度不高、稳健性差的问题,设计了一种严密的垂线偏差抗差最小二乘解法.首先,基于大地水准面与垂线偏差的关系,采用EGM2008 (Earth Gravity Model 2008)重力场模型计算参数初始解;然后,引入中位数抗差法,并选用Huber权函数计算等价权,迭代计算出稳健的垂线偏差最小二乘解;最后,结合两个实测算例对设计方法进行验证.试验结果表明,该方法计算的垂线偏差分量与约定真值最大偏差在0.5"左右,相较于对比方法精度更高;同时,该方法能有效抵抗粗差值的影响,具有较强的稳健性.

关键词 垂线偏差, 最小二乘, 抗差估计, Huber权函数, EGM2008重力场模型

中图分类号: P171; **文献标识码:** A

1 引言

大地测量学中,垂线偏差(Vertical Deflection, VD)定义为地面一点铅垂线方向(重力矢量方向)与相应椭球面法线方向之间的夹角^[1].测定垂线偏差的目的是在国家控制网建设中将地面观测的方向值(以垂线方向为准)改化到以相应椭球面法线为准的方向值,以便求得以地球椭球面为基准面的控制点大地坐标.随着对垂线偏差研究的不断深入,其应用范围也愈加广泛,除了归算观测量的平差基准面之外,丰富的垂线偏差变化信息还应用在大地水准面中央区效应的改进以及海底地形、地球重力场反演和地震研究与预报等多个方面^[2-4].

垂线偏差的测定是大地测量中一项十分重要且复杂的工作.常用的垂线偏差测定方法有天文大地测量法、数字天顶摄影仪法、GNSS (Global Navigation Satellite System)/水准法、重力测量法、地球重力场模型法以及GNSS网和常规控制网联合平差算法.天文大地测量法通过天文测量与

大地测量获得同一点的坐标,经由垂线偏差公式算得,是一种直接测定的方法;该法工作量大、操作复杂,实际应用有诸多不便^[5-6].数字天顶摄影仪法利用CCD (Charge-Coupled Device)成像技术测定天文经纬度、GNSS测定大地经纬度,来确定测站点的垂线偏差,其测量精度高达 $\pm 0.08''$;该法操作复杂、仪器昂贵,难以广泛应用^[7-8].GNSS/水准法通过联测GNSS和水准点得到大地水准面差距,并由垂线偏差和大地水准面差距的关系得到测站点的垂线偏差;该法计算精度易受GNSS/水准点密度和地形起伏的影响,且效率较低^[9].重力测量法是利用重力异常数据,采用Stokes函数逼近方法计算垂线偏差,该法受重力异常数据精度及分辨率的影响较大^[2, 10].地球重力场模型法直接利用重力位系数确定垂线偏差,该法受重力场模型精度和地形起伏影响较大^[11-12].GNSS网和常规控制网联合平差算法主要考虑到垂线偏差对观测数据的影响,将垂线偏差作为未知参数纳入平差模型中,以此作

2022-03-02收到原稿, 2022-04-25收到修改稿

*国家自然科学基金项目(41974216)资助

[†]13838092876@139.com

为连接地面常规观测网和GNSS观测网联合平差的纽带,在改善平差结果的同时,计算出测区的垂线偏差值;该法虽然能间接求出垂线偏差,但精度不高,受异常观测值影响较大^[13-15].

综上所述,直接方法测定垂线偏差精度高,但代价较高,难以广泛使用;常规方法虽然使用方便,但计算精度受限.然而,随着厘米级甚至毫米级(相对)精度大地水准面模型的广泛建立,使得利用大地水准面模型获取较高精度的垂线偏差成为可能^[16-17].因此,在文献[18-19]的研究基础上,本文设计了一种用于计算垂线偏差的抗差最小二乘严密解法.该方法基于垂线偏差分量和大地水准面差距 ΔN 的关系,结合EGM2008 (Earth Gravity Model 2008)重力场模型,并采用最小二乘原理对垂线偏差进行求解;同时,为避免异常数据影响,引入中位数抗差方法,并应用Huber权函数计算等价权,通过迭代的方式解算待求点的垂线偏差,最终得到抗差最小二乘解.最后,结合两个算例对本文方法、文献[18]方法及EGM2008重力场模型法的计算结果进行对比,以验证本文方法的有效性.

2 由大地水准面模型求解垂线偏差的基本数学模型

如图1所示,由大地水准面和垂线偏差的关系,可以得到 ΔN 和垂线偏差 u 的关系^[9, 20-21]:

$$u = -\frac{d(\Delta N)}{ds}, \quad (1)$$

式中, s 为大地水准面沿任意方向铅垂面与参考椭球面交线的长度(简称距离).通常将垂线偏差 u 分解为南北分量 ξ (子午分量)和东西分量 η (卯酉分量),且有如下关系式

$$u = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad (2)$$

式中, α 为投影方向的大地方位角.当在南北方向时,有

$$u = \xi, ds = ds_B = R dB = (r+h)dB, \quad (3)$$

式中, ds_B 为纬度方向的距离差, r 表示地球半径, h 表示高程, R 为到地心的距离, dB 为纬度差, B 表示纬度.当在东西方向时,有

$$u = \eta, ds = ds_L = R \cos B dL = (r+h) \cos B dL, \quad (4)$$

式中, ds_L 为经度方向的距离差, dL 为经度差, L 为经度.

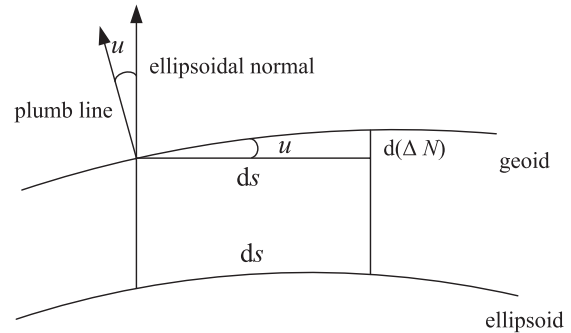


图 1 大地水准面与垂线偏差的关系示意图^[20]

Fig. 1 The relationship diagram of geoid and vertical deflection^[20]

因此,结合(1)-(4)式分别得到 ΔN 和 (ξ, η) 的关系

$$\begin{cases} \xi = -\frac{d(\Delta N)}{ds_B} = -\frac{1}{(r+h)} \frac{\partial(\Delta N)}{\partial B}, \\ \eta = -\frac{d(\Delta N)}{ds_L} = -\frac{1}{(r+h) \cos B} \frac{\partial(\Delta N)}{\partial L}. \end{cases} \quad (5)$$

基于(5)式, ΔN 的总偏导数将 ΔN 和 (ξ, η) 联系在一起,可以得到^[22]

$$d(\Delta N) = \frac{\partial(\Delta N)}{\partial B} dB + \frac{\partial(\Delta N)}{\partial L} dL. \quad (6)$$

进而可以得到

$$\xi(r+h)dB + \eta(r+h) \cos B dL + d(\Delta N) = 0. \quad (7)$$

(7)式即为大地水准面模型法求解垂线偏差的计算公式.文献[18]采用子午圈曲率半径 M 和卯酉圈曲率半径 N 代替(7)式中的地球半径 r ,得

$$\xi(M+h)dB + \eta(N+h) \cos B dL + d(\Delta N) = 0. \quad (8)$$

利用(8)式采用最小二乘(Least Squares, LS)来求解垂线偏差.

3 本文方法

3.1 平差模型

在实际测量中, 计算某点的垂线偏差时, 采用(7)式或(8)式可能会存在与局部不相符的问题, 易引入系统性偏差. 对此, 本文采用近似局部球面模型的方法求解垂线偏差, 用高斯密切球半径 R_G 代替地球半径 r :

$$R_G = \sqrt{M(B)N(B)}, \quad (9)$$

式中, $M(B) = a(1 - e^2)/W^3$, $N(B) = a/W$, $W = \sqrt{1 - e^2(\sin B)^2}$, $e = \sqrt{2f - f^2}$ 为椭球第1偏心率, a 和 f 分别为椭球长半轴和扁率.

将 R_G 代入(7)式中, 可以得到

$$\xi(R_G + h)dB + \eta(R_G + h)\cos BdL + d(\Delta N) = 0. \quad (10)$$

依据(10)式, 可以构建具有参数的条件平差模型; $F(\mathbf{L}, \mathbf{X}) = 0$, 其中 \mathbf{L} 为观测值向量, \mathbf{X} 为通过函数模型 F 求解的参数向量. 采用最小二乘原理对垂线偏差分量进行求解, 并以矩阵的形式表示可以得到如下具有参数的条件平差模型

$$\mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{B}_X\delta\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{l} = 0, \quad (11)$$

式中, \mathbf{V} 为观测值改正数向量, $\delta\hat{\mathbf{X}}$ 为未知参数改正数向量, \mathbf{B} 、 \mathbf{B}_X 以及 \mathbf{l} 分别为系数矩阵和常数项, 表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{L}} \Big|_{(\mathbf{X}_0, \mathbf{L}_0)}, \\ \mathbf{B}_X = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{(\mathbf{X}_0, \mathbf{L}_0)}, \\ \mathbf{l} = F(\mathbf{L}_0, \mathbf{X}_0), \end{cases} \quad (12)$$

式中, \mathbf{X}_0 、 \mathbf{L}_0 表示在求解偏导数时采用的值.

由(11)式, 根据广义最小二乘原理构建目标函数

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} - 2\mathbf{K}^T (\mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{B}_X\delta\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{l}) = \min, \quad (13)$$

式中, \mathbf{P} 为权阵, \mathbf{K} 为函数的联系数向量.

对(13)式中的 \mathbf{V} 和 $\delta\hat{\mathbf{X}}$ 分别求导并令其为零, 整理得

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{V}} = 2\mathbf{V}^T \mathbf{P} - 2\mathbf{K}^T \mathbf{B} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial (\delta\hat{\mathbf{X}})} = -2\mathbf{K}^T \mathbf{B}_X = 0. \end{cases} \quad (14)$$

将(11)式代入(14)式, 通过构建法方程并对其解算, 可以得到具有参数的条件平差模型的最小二乘解

$$\begin{cases} \delta\hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{M}_{B_X}^{-1} \mathbf{B}_X^T \mathbf{N}_B^{-1} \mathbf{l}, \\ \mathbf{V} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{N}_B^{-1} (\mathbf{B}_X \delta\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{l}), \end{cases} \quad (15)$$

式中, $\mathbf{M}_{B_X} = \mathbf{B}_X^T \mathbf{N}_B^{-1} \mathbf{B}_X$, $\mathbf{N}_B = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T$.

3.2 权值的确定及参数估值迭代解

文献[18]采用LS方法结合大地水准面模型计算垂线偏差, 只考虑了观测值的先验精度, 没有针对不同质量的观测数据进行合理定权. 若观测值中存在粗差, 按照(10)–(15)式进行计算会使结果发生较大扭曲而偏离真值.

对此, 本文基于中位数抗差法, 采用Huber权函数计算权因子, 给观测值赋予不同的权重, 从而使各权值更加合理, 以此建立抗差最小二乘迭代方法, 具体步骤如下:

(1)利用(15)式计算观测值残差初始值, 采用中位数对求得的残差 \mathbf{V}_{LS} 进行中心化处理, 并按下式计算其迭代初值

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{LS} - \text{median}(\mathbf{V}_{LS}), \quad (16)$$

式中, \mathbf{V}_{LS} 为采用最小二乘原理首次计算得到的观测值残差初始值, $\text{median}(\cdot)$ 为中位数算子;

(2)根据 $\Delta \mathbf{V}$ 计算初始方差因子

$$\sigma_{\Delta \mathbf{V}} = \text{median}(|\Delta \mathbf{V}|)/0.6745, \quad (17)$$

式中, 因子0.6745使得 $\sigma_{\Delta \mathbf{V}}$ 等同于正态分布数据的标准偏差. 利用(17)式计算得到的参数抗差解对粗差的大小不敏感, 具有50%的高崩溃污染率, 抗差性良好;

(3)权值的计算及权函数的选取. 考虑到在进行平差计算时, 需要进行权阵与协方差阵之间的

转换, 为避免在进行矩阵求解转换时, 权阵为零引起的矩阵奇异而导致无法解算的问题, 本文选取 Huber 权函数作为等价权函数计算权因子, 具体表达式为

$$w_i = \begin{cases} 1, & |\Delta V_i / \sigma_{\Delta V}| \leq k_0, \\ k_0 / |\Delta V_i / \sigma_{\Delta V}|, & |\Delta V_i / \sigma_{\Delta V}| > k_0, \end{cases} \quad (18)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, n$ (n 为观测值总个数), ΔV_i 、 $\sigma_{\Delta V}$ 分别为步骤(1)和(2)的计算结果, k_0 为权函数界值, 一般取 1.5–2.5. 有关 k_0 的具体取值可以根据数据异常值的情况进行适当的取值, 文献[23]在采用 Huber 权函数时, 根据其数据的特点, 在试验时 k_0 取值 1.0. 由于观测数据独立且等精度, 因此, (18) 式可直接作为观测值的等价权计算式, 即

$$\bar{p}_i = w_i, \quad (19)$$

式中, \bar{p}_i 为采用 Huber 权函数计算后的等价权;

(4) 得到 \bar{p}_i 后, 采用(15)式再次进行平差, 并利用平差计算值更新参数初值, 将其作为下一次迭代计算的初值进行平差计算;

(5) 迭代停止判断. 利用步骤(1)–(3)计算的权值, 进行平差计算, 若两次计算参数的差值达到阈值要求就停止迭代, 输出计算结果; 否则重复上述步骤, 直至满足迭代停止条件;

(6) 计算结果输出.

3.3 结果精度评定

由上述平差计算可以得到验后单位权中误差及参数的协因数阵

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \pm \sqrt{\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{V}^T / (n - t)}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{M}_{B_X})^{-1} = (\mathbf{B}_X^T \mathbf{N}_B^{-1} \mathbf{B}_X)^{-1}, \end{cases} \quad (20)$$

式中, $\hat{\sigma}$ 为验后单位权中误差, $\bar{\mathbf{P}}$ 为等价权矩阵, t 为必要观测值个数, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}}$ 为参数的协因数阵.

由(20)式可以得到参数的中误差计算公式

$$m_{\hat{X}_i} = \hat{\sigma} \sqrt{q_{ii}}, \quad (21)$$

式中, q_{ii} 为协因数阵 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}}$ 对角线上的元素.

4 算例分析

4.1 算例1

算例1采用文献[18]中的试验数据, 该数据在地势平坦地区获得, 平均海拔为 160 m. 如图2所示, 点 T 为待测点, 该点垂线偏差采用 GNSS/水准法 (三等水准) 获得, 测量结果详见表1; 点 T 周围按间距 1 km 的距离, 均匀布设 8 个控制点. 点 T 及周围 8 个点的大地经纬度已知, ΔN 由 EGM2008 重力场模型求得. 在试验时将 T 点实测值作为约定真值, 以此开展试验分析.

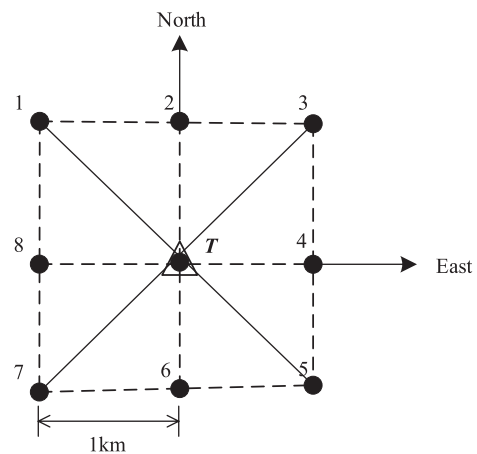


图 2 待求点 T 及周围点分布示意图^[18]

Fig. 2 The diagram of distribution of point T and its surrounding points^[18]

表 1 待求点 T 的基本信息

Point	$L/^\circ$	$B/^\circ$	$\xi/''$	$\eta/''$
T	272.495356	39.833015	1.35 ± 0.31	7.09 ± 0.38

为验证本文方法的稳健性, 同时考虑到 EGM-2008 重力场模型的精度 (详见文献[11]), 设计了以下两个试验方案对本文方法的抗差性进行验证.

方案1: 在算例1数据的基础上, 设计了 6 组含有不同误差的数据进行试验.

试验数据(1): 对点 1–8 处的 ΔN 不加入任何误差, 保持原数据不变;

试验数据(2): 在点 1 处 ΔN 加上 5 mm 的误差;

试验数据(3): 在点1处 ΔN 加上10 mm的误差, 将其构造为低精度观测值;
 试验数据(4): 在点1处 ΔN 加上20 mm的误差, 将其构造为低精度观测值;
 试验数据(5): 在点1处 ΔN 加上30 mm的误差,

将其构造为粗差观测值;
 试验数据(6): 在点1处 ΔN 加上50 mm的误差, 将其构造为大粗差观测值.
 利用本文方法和文献[18]方法分别对6组数据进行平差处理, 结果如表2所示.

表 2 方案1中本文方法与文献[18]方法计算结果及精度对比
 Table 2 Comparison of calculation results and accuracy between the proposed method and the method in Reference [18] in scheme 1

Test data	VDs	Method of Reference [18]			Method of this paper		
		Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$	Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$
(1)	ξ	1.12	± 0.03	0.04	1.15	± 0.01	0.01
	η	6.76	± 0.04		6.73	± 0.01	
(2)	ξ	1.29	± 0.11	0.13	1.16	± 0.01	0.01
	η	6.54	± 0.14		6.71	± 0.01	
(3)	ξ	1.46	± 0.25	0.30	1.16	± 0.01	0.01
	η	6.32	± 0.32		6.71	± 0.02	
(4)	ξ	1.81	± 0.53	0.63	1.16	± 0.02	0.02
	η	5.87	± 0.69		6.71	± 0.03	
(5)	ξ	2.15	± 0.81	0.97	1.16	± 0.03	0.03
	η	5.42	± 1.05		6.70	± 0.04	
(6)	ξ	2.84	± 1.37	1.64	1.17	± 0.07	0.06
	η	4.53	± 1.78		6.70	± 0.05	

由表2中试验数据(1)的结果可以看出, 在不加任何误差时, 本文方法计算的垂线偏差分量和实测值相近, 且与文献[18]方法计算结果在同一数量级; 应用本文方法计算的验后单位权中误差 $\hat{\sigma}$ 为0.01'', 而文献[18]计算的验后单位权中误差 $\hat{\sigma}$ 为0.04''. 此外, 由试验数据(2)–(4)的计算结果可知, 当数据中存在低精度观测值时, 文献[18]的计算结果在逐渐偏离约定真值更甚, 从 $\xi = 1.12''$ 、 $\eta = 6.76''$ 到最后的 $\xi = 1.81''$ 、 $\eta = 5.87''$, 且计算的精度也在下降; 由试验数据(5)–(6)的计算结果可知, 当数据中存在粗差观测值时, 文献[18]的计算结果偏离约定真值更甚, 精度下降. 综上, 相比文献[18], 本文方法计算结果稳定, 且精度可靠, 抗差性更好.

方案2: 为了进一步验证本文方法计算结果的稳定性, 针对不同位置、不同大小误差的抗差性, 增设4组数据作为方案2的试验数据进行试验.

试验数据(1): 对点1和点3处 ΔN 分别加上5 mm和10 mm误差, 将其改造为同时含有随机误差观测数据和低精度数据, 其余观测数据不变;

试验数据(2): 对点1和点3处 ΔN 分别加上10 mm和20 mm误差, 将其改造为低精度观测值, 其余观测数据不变;

试验数据(3): 对点1、点3和点6处 ΔN 分别加上5 mm、10 mm和20 mm误差, 将其改造为同时含有随机误差观测数据和多个低精度数据, 其余观测数据不变;

试验数据(4): 对点1、点3和点6处 ΔN 分别加上10 mm、20 mm和30 mm误差, 将其改造为同时含有低精度观测数据和粗差观测数据, 其余观测数据不变.

分别用本文方法和对比方法处理以上4组试验数据, 结果如表3所示.

表 3 方案2中本文方法与文献[18]方法计算结果及精度对比

Table 3 Comparison of calculation results and accuracy between the proposed method and the method in Reference [18] in scheme 2

Test data	VDs	Method of Reference [18]			Method of this paper		
		Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$	Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$
(1)	ξ	0.94	± 0.30	0.36	1.16	± 0.01	0.01
	η	6.09	± 0.39		6.71	± 0.01	
(2)	ξ	0.77	± 0.62	0.74	1.15	± 0.01	0.01
	η	5.42	± 0.80		6.71	± 0.01	
(3)	ξ	0.26	± 0.66	0.79	1.16	± 0.09	0.06
	η	6.09	± 0.86		6.72	± 0.10	
(4)	ξ	-0.26	± 1.07	1.28	1.17	± 0.12	0.08
	η	5.42	± 1.38		6.70	± 0.14	

由表3可以看出, 随着加入误差数量的增加和数值的增大, 文献[18]的计算精度不断下降, 其验后单位权中误差 $\hat{\sigma}$ 从0.36''增加到了1.28''; 文献[18]计算的垂线偏差子午方向分量 ξ 从原来的1.12''变到了最后的-0.26'', 卯西分量 η 从刚开始的6.76''变到了最后的5.42'', 计算结果偏离约定真值; 相反, 本文方法计算的垂线偏差数值一直保持和表2中未加任何粗差的试验数据(1)的结果相近, 计算结果受粗差影响不大, 和约定真值相近. 因此, 由本文方法计算的结果具有较强的稳健性.

4.2 算例2

算例1中的数据是在地势比较平缓地区获取的, 垂线偏差较小, 且控制点分布均匀, 为网格状, 而在实际工程中控制点的分布大多是不规则的. 对此, 选用文献[15]的实测数据作为算例2的试验数据, 该数据是围绕海拔高度约为2000 m的VLBI (Very Long Baseline Interferometry) 天线展开测量的控制点, 控制点的分布如图3所示.

图3中, 点D1-D3处的垂线偏差数^[15]采用一、二等天文大地测量法, 使用AT330型数字天顶摄影

定位系统(天顶筒)测得, 测量结果详见表4, 其大地水准面差距是由EGM2008重力场模型求得, 试验中将点D1-D3处的垂线偏差实测值作为约定真值对本文方法加以验证. 点P1-P5及点GUAO (GPS Station of the Urumqi Astronomical Observatory) 的大地坐标由GNSS测量系统测得, 该6个点的大地水准面差距同样由EGM2008重力场模型求得.

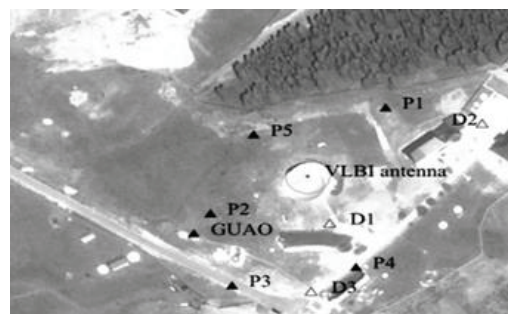


图 3 算例2数据分布示意图^[15]

Fig. 3 The example 2 data distribution diagram^[15]

分别利用本文方法、EGM2008重力场模型法及文献[18]方法处理算例2试验数据, 并将3种方法

解算的垂线偏差与约定真值进行对比, 试验结果及精度统计情况如表5、表6所示.

表5给出了文献[18]、EGM2008重力场模型及

本文方法计算的点D1-D3处垂线偏差以及与约定真值的差值; 表6给出了本文方法和文献[18]的解算结果和精度.

表 4 点D1-D3基本信息

Table 4 The basic information of points D1-D3

Points	$L/^\circ$	$B/^\circ$	$\xi/''$	$\eta/''$
D1	87.178325	43.471238	32.78 ± 0.05	11.38 ± 0.05
D2	87.179440	43.471926	32.79 ± 0.02	11.33 ± 0.03
D3	87.178188	43.470774	32.56 ± 0.06	11.38 ± 0.16

表 5 3种方法计算结果与约定真值的比较

Table 5 The three methods results compared with the theoretical values

Methods	Points	Estimates		Theoretical value		Difference	
		$\xi/''$	$\eta/''$	$\xi/''$	$\eta/''$	$\Delta\xi/''$	$\Delta\eta/''$
Reference [18]	D1	32.06	12.54	32.78	11.38	-0.72	1.16
	D2	31.90	12.04	32.79	11.33	-0.89	0.71
	D3	32.48	12.33	32.56	11.38	-0.08	0.95
EGM2008 gravity field model	D1	32.70	13.07	32.78	11.38	-0.08	1.69
	D2	32.64	13.03	32.79	11.33	-0.15	1.70
	D3	32.71	13.11	32.56	11.38	0.15	1.73
This paper	D1	32.65	11.88	32.78	11.38	-0.13	0.50
	D2	32.46	11.53	32.79	11.33	-0.33	0.20
	D3	32.86	11.89	32.56	11.38	0.30	0.51

表 6 算例2中本文方法与文献[18]方法计算结果及精度对比

Table 6 Comparison of calculation results and accuracy between the proposed method and the method in Reference [18] in example 2

Points	VDs	Method of Reference [18]			Method of this paper		
		Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$	Estimates/''	$m_{\hat{x}}/''$	$\hat{\sigma}/''$
D1	ξ	32.06	± 0.65	0.04	32.65	± 0.25	0.02
	η	12.54	± 0.61		11.88	± 0.27	
D2	ξ	31.90	± 0.74	0.05	32.46	± 0.13	0.01
	η	12.04	± 0.54		11.53	± 0.09	
D3	ξ	32.48	± 0.42	0.05	32.86	± 0.16	0.01
	η	12.33	± 0.62		11.89	± 0.09	

由表5可以看出,文献[18]计算结果与约定真值在子午方向最大偏差为 $0.89''$,最小偏差为 $0.08''$,在卯酉方向最大偏差为 $1.16''$,最小偏差为 $0.71''$;而本文方法计算结果与约定真值在子午方向最大偏差为 $0.33''$,最小偏差为 $0.13''$,在卯酉方向最大偏差为 $0.51''$,最小偏差为 $0.20''$.结合表6中两种方法计算的精度可知,相比于文献[18],本文方法计算的结果与约定真值更加接近,计算结果更加可靠、稳定.

此外,由表5可以看出,EGM2008重力场模型计算的垂线偏差在子午方向和卯酉方向精度不一,在子午方向计算结果与约定真值较为相近,最大偏差为 $0.15''$,最小偏差为 $0.07''$,在卯酉方向与约定真值相差较大,最大偏差为 $1.73''$,最小偏差为 $1.69''$.

图4为3种方法计算的垂线偏差分量与约定真值之间的差值示意图.由图4(a)子午方向差值可以看出,本文方法解算结果优于文献[18],与EGM2008重力场模型解算值结果相近;由图4(b)卯酉方向差值可以看出,本文方法解算结果优于文献[18]和EGM2008重力场模型解算值.从图4中可以看出,本文方法计算的垂线偏差各分量值与约定真值最大偏差保持在 $0.5''$ 左右.

因此,结合算例2试验结果可以看出,本文方法计算的垂线偏差在各分量方向具有很好的一致性,计算结果与约定真值更加接近,总体上本文方法优于文献[18]和EGM2008重力场模型法.

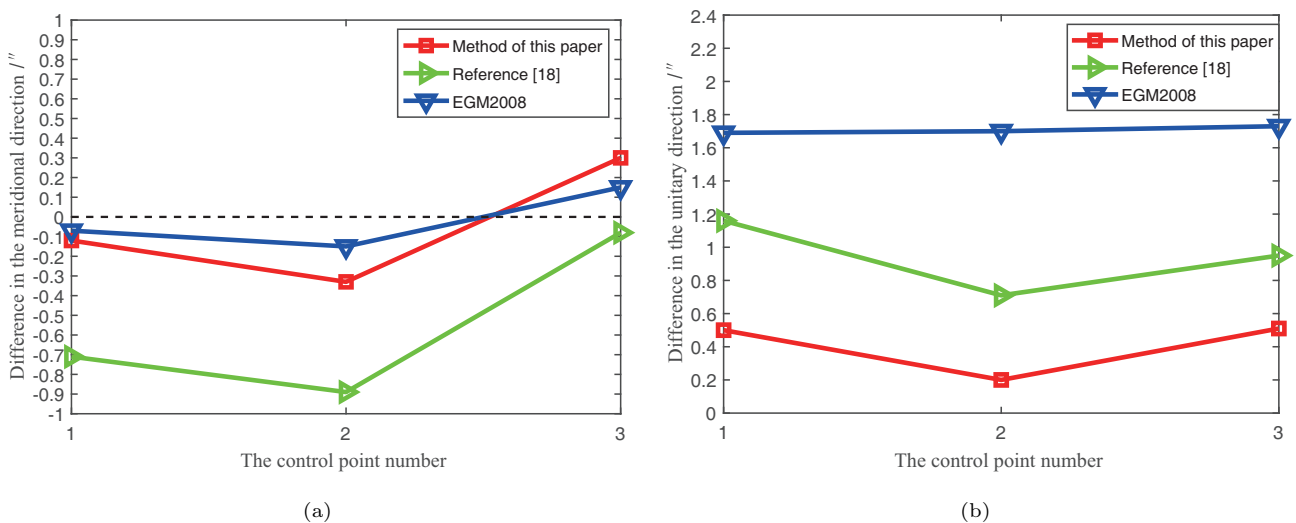


图4 三种方法计算结果与约定真值在子午和卯酉方向差值示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the difference between the results calculated by the three methods and the theoretical values in the meridional and unitary directions

5 总结

为准确计算垂线偏差,本文设计了一种求解垂线偏差的抗差最小二乘严密解法.该方法基于垂线偏差和大地水准面的关系,采用最小二乘方法和EGM2008重力场模型进行垂线偏差的求解;同时,考虑到观测值中可能存在粗差的情况,引入中位数

抗差法,并采用Huber权函数计算等价权来合理定权;最后,得到稳健的抗差最小二乘解.结合两个算例验证了本文方法的有效性.算例1试验结果表明,相较于对比方法,本文方法具有较好的抗差性;算例2试验结果表明,相较于对比方法和EGM2008重力场模型值,本文方法计算的垂线偏差在各分量方向有很好的一致性,各分量方向与约定真值最大偏差保持在 $0.5''$ 左右,计算结果与约定真值最为贴合.

参考文献

- [1] 吕志平, 乔书波. 大地测量学基础. 北京: 测绘出版社, 2010: 119-120
- [2] 李月锋, 丁行斌. 地球物理学进展, 2008, 23: 1736
- [3] 李厚朴, 边少锋. 测绘学报, 2011, 40: 730
- [4] 韩延本, 王红旗, 尹志强, 等. 地球物理学进展, 2012, 27: 1287
- [5] 张超, 詹银虎, 王若璞, 等. 测绘科学技术学报, 2021, 38: 331
- [6] Abrehdary M, Sjöberg L E. StGG, 2020, 64: 1
- [7] 郭金运, 宋来勇, 常晓涛, 等. 武汉大学学报(信息科学版), 2011, 36: 1085
- [8] Hirt C, Flury J. JGeod, 2008, 82: 231
- [9] 张永毅, 张兴福. 大地测量与地球动力学, 2016, 36: 395
- [10] 宁津生, 郭春喜, 王斌, 等. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31: 1035
- [11] 章传银, 郭春喜, 陈俊勇, 等. 测绘学报, 2009, 38: 283
- [12] Hirt C. JGeod, 2012, 86: 729
- [13] 盛乐山. 武汉测绘科技大学学报, 1991, 16: 56
- [14] 马下平, 游为. 武汉大学学报(信息科学版), 2017, 42: 550
- [15] 马小辉, 张志斌, 孙中苗, 等. 天文学报, 2021, 62: 2
- [16] 李伟超, 张兴福, 陈智伟, 等. 大地测量与地球动力学, 2019, 39: 843
- [17] Ellmann A, Märdla S, Oja T. Survey Review, 2020, 52: 352
- [18] Soler T, Han J Y. Journal of Surveying Engineering, 2021, 147: 04021021
- [19] 杨元喜. 抗差估计理论及其应用. 北京: 八一出版社, 1993: 20-33
- [20] Hofmann-Wellenhof B, Moritz H. Physical Geodesy. Austria: Springer Press, 2006: 116-118
- [21] Vittuari L, Tini M A, Sarti P, et al. Sensors, 2016, 16: 565
- [22] Soler T, Carlson A E Jr, Evans A G. GeoRL, 1989, 16: 695
- [23] 王海栋, 柴洪洲, 赵东明. 系统仿真学报, 2010, 22: 2091

A Robust Least Squares Rigorous Solution Method for Calculating Vertical Deflections

YANG Hao LI Zong-chun RAN Jia-huan LIU Zhong-he HE Hua

(Institute of Geospatial Information, Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou 450001)

ABSTRACT To address the current problems of low accuracy and poor robustness in solving the vertical deflections using the geodetic level model, a rigorous robust least squares solution for vertical deflections is designed. Firstly, based on the relationship between geoid and vertical deflections, the Earth Gravity Model 2008 is used to calculate the initial parameters. Secondly, this method introduces the median robust method and chooses the Huber weight function to calculate the equivalent weights, and the robust least squares solution of the vertical deviations is obtained by iterating. Finally, the design method is validated by two experimental examples. The results show that the maximum deviation of the vertical deflections components calculated by this method from the theoretical value is around $0.5''$, which is more accurate than the comparison method. Meanwhile, the proposed method can effectively resist the influence of gross error and has strong robustness.

Key words vertical deflections, least squares, robust estimation, Huber weight function, EGM2008 gravity field model