

基于Shapelets基函数的引力透镜质量重构方法*

刘凯宙^{1,2†} 韦成亮^{‡1} 聂麟^{1,2}

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)

(2 中国科学技术大学天文与空间科学学院 合肥 230026)

摘要 引力透镜效应是探测星系团物质分布的有效方法之一。目前,利用引力透镜数据重构星系团质量分布的主流方法可以分为两大类,即参数法和非参数法。在实际研究工作中,受限于质量模型假设和计算分辨率等方面的影响,现有的重构算法仍有诸多亟需解决的问题。基于Shapelets基函数的引力透镜质量重构方法通过基函数来实现引力透镜质量重构,使用Shapelets基函数分解引力透镜势,以引力透镜中多重像的位置和背景星系团率畸变为限制条件来迭代求解基函数系数从而得到透镜体的质量分布。通过拟合一个模拟的NFW (Navarro, Frenk and White)透镜系统测试了新方法的可行性,结果表明新方法可以在整体上重构出透镜体的质量分布,并拟合出接近真实的源位置,能够为星系团质量测量提供一套灵活且高效的重构算法。

关键词 引力透镜; 强引力透镜; 弱引力透镜; 暗物质晕; 质量分布

中图分类号: P159; **文献标识码**: A

1 引言

现代宇宙学理论和巡天观测数据表明宇宙中暗物质远多于重子物质,其引力主导了宇宙结构的形成和演化^[1]。在宇宙结构形成的等级成团理论框架下^[2],暗物质团块在引力作用下塌缩形成暗物质晕(简称为暗晕),随着宇宙的演化,小质量的暗晕会合并形成更大质量的暗晕,重子物质在引力作用下落入暗晕并聚积形成了当今巡天观测到的星系^[3]。因此对暗晕质量分布的研究将有助于我们对宇宙结构演化历史的理解和限制宇宙学参数^[4]。

在星系巡天观测中,由背景星系发出的光线会受到前景暗晕引力场的偏折,使观测到的背景星系图像发生改变,从而产生引力透镜效应^[5-6]。引力透镜效应作为测量宇宙物质分布的有效探针之一,是研究星系团暗晕质量分布的重要方法^[7]。在引力透

镜理论框架下,引力透镜效应与透镜天体的投影质量分布直接相关。通过分析被透镜改变的背景天体的图像,可以得到透镜天体暗晕的投影质量分布。为了能够利用引力透镜效应来测量星系团暗晕的质量分布,首先需要构建透镜的质量分布模型。通过观测数据对模型的参数进行限制,从而得到透镜体的真实质量分布。目前引力透镜质量重构的方法可以分为两大类,即参数法和非参数法。这两类重构方法的主要区别在于构建模型时是否考虑星系团暗晕的物理图景^[8]。

参数法在构建透镜模型时需要先假设暗晕的质量分布模型,把透镜体表示成单个或多个暗晕的组合。目前,参数法的主流算法有GLAFIC^[9]、LENSTOOL^[10]等。参数模型的常规做法是使用一个或多个密度轮廓模型来描述暗晕的整体质量分

2022-03-17收到原稿, 2022-04-24收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11903082)资助

†liukzh18@mail.ustc.edu.cn

‡chengliangwei@pmo.ac.cn

布, 同时每个成员星系处放置一个子暗晕模型. 假设每个星系都有同样的质光比, 那么每个子暗物质晕的质量比可以由对应星系的光度比来决定. 在参数拟合中, 为了考察外部天体对透镜星系的引力作用, 通常会在上述质量分布模型中添加外部剪切的扰动项来联合限制透镜天体的质量分布.

非参数的主流算法有GRALE^[11]、LensPerfect^[12-13]等. 在非参数法中, 通常并不预设暗晕的密度分布轮廓模型, 因此模型构建不会受限于暗晕中的光度分布. 非参数法的经典做法是把透镜天体的质量分布使用网格化方法来表示^[14], 结合透镜观测数据, 通过限制每个网格上的质量得到透镜体的质量分布.

在星系团质量重构的实际研究工作中, 参数法和非参数法的表现各有所长. 参数法根据星系分布放置暗晕, 同时按照星系光度调整暗晕的质量分配, 这使拟合参量大大减少, 拟合过程更加快速. 但是参数法中子暗晕的分布受限于可观测星系的影响, 使得模型构建极不灵活, 在没有星系观测的位置, 即使有小质量的暗晕分布, 该方法也难以准确拟合出来. 非参数模型则正好相反, 脱离发光物质分布的限制使得模型比较灵活, 但拟合算法的自由参量往往多于透镜观测量的限制数, 导致拟合过程比较低效. 为了兼顾上述两种方法的优势, 本文通过使用Shapelets基函数分解透镜势的方法, 发展了一种新的星系团透镜质量重构算法. 该方法有效避免了传统参数法中暗晕质量分布受限于暗晕质量模型的约束, 同时也减少了需要拟合的未知量的数量, 能够快速且准确地重构出透镜体的质量分布.

2 基函数透镜模型

2.1 引力透镜基础

在引力透镜系统中, 背景天体发出的光线会受到透镜天体的偏折, 使观测到的背景天体在天球上的像位置($\vec{\theta}$)相较于本征位置(源位置 $\vec{\beta}$)发生变化, 这个位置改变可以由透镜方程描述为^[15]

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}), \quad (1)$$

根据引力透镜理论, 透镜偏转角 $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ 可以表示为

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}, \quad (2)$$

式中 κ 是会聚量, 是一个无量纲的投影质量面密度, 定义为 $\kappa(\vec{\theta}) = \Sigma(\vec{\theta})/\Sigma_{\text{cr}}$. 这里的 $\Sigma(\vec{\theta})$ 和 Σ_{cr} 分别表示透镜天体的质量面密度和临界面密度量, 而

$$\Sigma_{\text{cr}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{\text{ds}}}, \quad (3)$$

其中 D_s 、 D_d 、 D_{ds} 分别是观察者到源、观察者到透镜、透镜到源的角直径距离. 通过定义引力透镜势 ψ , 可以把约化偏折角表示为透镜势的梯度, 即 $\vec{\alpha} = \nabla\psi$, 而

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|. \quad (4)$$

会聚量和透镜势满足泊松方程

$$\kappa = \frac{1}{2} \Delta\psi = \frac{1}{2} (\psi_{xx} + \psi_{yy}), \quad (5)$$

其中

$$\psi_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (6)$$

引力透镜对背景天体像的扭曲作用可以用剪切量描述, 剪切量有两个分量 γ_1 、 γ_2 , 是透镜势的二阶微分, 分别定义为

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} (\psi_{xx} - \psi_{yy}), \quad \gamma_2 = \psi_{xy}, \quad (7)$$

其中

$$\psi_{xy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

通常把剪切量表示成如下复数形式:

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad (9)$$

i 是虚数符号.

2.2 极坐标的Shapelets基函数

在本文的质量重构算法中, 我们使用Refregier等人提到的Shapelets基函数来分解透镜势^[16-19]. 在极坐标下, 该基函数表示为

$$B_{n,m}(r, \varphi; R) = \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+1}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r^{|m|} L_{\frac{n-|m|}{2}}^{(|m|)} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \exp(-r^2/2R^2) \exp(-im\varphi), \quad (10)$$

其中 R 是标度半径, r 、 φ 是平面极坐标位置. m 、 n 是参数, n 可以是任何大于等于0的整数, m 是 $-n$ 到 n 之间, 且与 n 奇偶性相同的整数. L 是广义拉盖尔多项式, 定义为

$$L_{\frac{n-|m|}{2}}^{(|m|)} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) = \sum_{k=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^k}{k!} C_{(n+|m|)/2-k}^{(n-|m|)/2-k} \left(\frac{r^2}{R^2} \right)^k, \quad (11)$$

C 是组合数符号.

平面极坐标系下的任一平滑函数可以使用基函数分解为^[20]

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{n,m} B_{n,m}(r, \varphi; R), \quad (12)$$

其中基函数的系数为

$$f_{n,m} = \iint f(r, \theta) B_{n,m}^*(r, \varphi; R) r dr d\varphi.$$

根据基函数的定义, 基函数的角向结构由

$$\exp(-im\varphi)$$

决定, 径向结构由拉盖尔多项式

$$L_{(n-|m|)/2}^{(|m|)}(r^2/R^2),$$

幂函数 $r^{|m|}$ 和指数函数 $\exp(-r^2/2R^2)$ 决定. 拉盖尔多项式是幂函数的和, 最高幂次为 $n - |m|$, 所以基函数幂函数部分的最高幂次为 n . 基函数的角向拟合能力与 $|m|$ 有关, 径向拟合能力主要与 n 有关. 在极坐标下Shapelets基函数在径向上的延展范围由幂函数部分和指数函数部分共同决定, r 小的地方幂函数占主导, 在 r 足够大的地方, 指数函数这部分会足够小, 使得基函数足够小, 可以看作Shapelets基函数存在一个截断半径. 截断半径与幂函数的最高幂次相关, 基函数的幂次 n 越大, 截断半径越大. 同时, 根据基函数的定义, 基函数的截断半

径与标度半径 R 成正比. 用基函数分解存在某一定义范围内的函数, 基函数的最大截断半径需要覆盖函数的定义范围. 理论上, 如果使用任意多的基函数, 那么标度半径 R 可以任意小. 因此, 只要 n 足够大, 基函数的截断半径就可以超过目标函数的有效半径, 但实际使用中只能用有限个基函数来实现重构算法. 如果标度半径太小, 基函数的有效半径小于目标函数的有效半径, 就会导致有限个基函数无法准确地描述目标函数. 如果标度半径太大, 基函数的截断半径大于目标函数的有效半径, 那么有一部分基函数的拟合计算就会被浪费, 从而影响拟合效率. 所以实际工作中使用基函数时, 需要根据目标函数特征来选择合适的标度半径.

2.3 透镜量的基函数分解

在本文中, 我们将使用Shapelets基函数来分解引力透镜势 $\psi(r, \varphi)$. 在极坐标下, 引力透镜势可以使用Shapelets基函数分解为

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n,m} f_{n,m} B_{n,m}(r, \varphi; R).$$

基函数径向分辨率与 n 有关, 基函数角向分辨率与 m 有关, 如果透镜势 ψ 的分布随角向变化比较平缓, 那么实际分析中基函数并不需要太高的角分辨率, 因此可以根据情况适当降低 m 的最大值. 同时, 如果透镜势场为对称分布的情况下, 还可以只使用 n 为偶数的部分以减少后续拟合中使用的基函数数目. 另一方面, 根据第2.2节中的讨论分析可知, 由于Shapelets基函数的有效半径与 n 和标度半径 R 有关, 因此在实际计算中使用的基函数数量是有限的, 这样由基函数描述的透镜势会存在一个最大的截断半径. 这个截断半径以外的透镜势无法被基函数描述, 因此基函数只能描述靠近中心一定范围内的透镜势. 对透镜模型拟合的限制来源于透镜的观测效应, 根据引力透镜理论, 透镜的观测效应往外越弱, 存在一个有效范围. 因此, 我们可以根据基函数的最高阶选取合适的标度半径, 使得基函数刚好覆盖透镜数据的有效范围. 这样构建的透镜势在有效范围之外为0, 在有效半径内, 总的透镜势可以表示为由基函数描述的透镜势和一个常数的组合. 根据引力透镜理论^[15], 在透镜观测量中多重像位

置与透镜势的一阶导有关, 放大率和椭率与透镜势的二阶导有关, 时间延迟与透镜势的相对差有关, 这些观测都与透镜势的绝对值无关. 并且多重像位置、背景星系椭率变化等观测效应也只与图像处透镜势的形状有关, 与图像之外的透镜势分布无关. 因此, 基函数可以在拟合范围内描述透镜势.

2.3.1 基函数标度半径选择和最高阶数的影响

为了利用基函数来准确分解目标透镜势, 在实际工作中需要根据透镜势的有效范围来调整基函数的标度半径. 图1描述了用基函数分解NFW透镜势^[21]时不同标度半径的影响, 我们使用不同标度半径的基函数以相同的限制条件分解一个相同的透

透镜势, 可以看到基函数标度半径取 $R = 30''$ 时有效半径相当于数据分布范围, 基函数能较好地描述透镜势. 标度半径过大有效半径就会大于数据分布范围, 在数据分布范围外基函数的结果比较混乱, 但是在数据分布范围内还是能够较好地描述透镜势. 如果标度半径过小, 基函数有效半径小于数据分布范围, 得到的 κ 会出现波浪形状, 基函数无法描述内部透镜势. 所以在选择基函数标度半径时要让基函数最高阶的有效半径完全覆盖限制数据分布范围. 确定基函数的最高幂次 n 后, 调整标度半径 R 的大小, 使幂次最高基函数的有效半径超过限制数据分布范围.

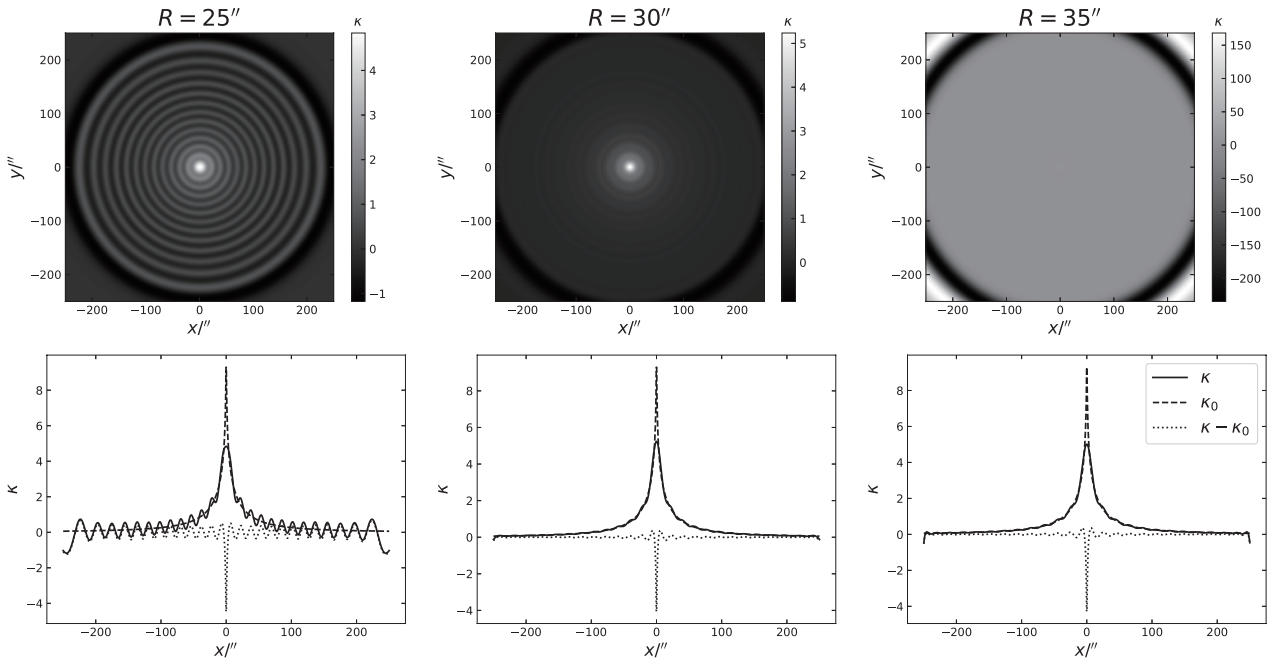


图1 基函数标度半径对透镜势分解的影响. 使用 $m = 0$, $n \in [0, 50]$ 的基函数分解一个半径在 $250''$ 以内的NFW (Navarro, Frenk and White)透镜势, 基函数的标度半径分别为 $25''$ 、 $30''$ 和 $35''$. 上图是不同标度半径基函数模型的会聚量, 下图是基函数模型和原模型的会聚量截面, 实线为基函数模型, 虚线为原模型, 点线为基函数模型和原模型的残差. κ 和 κ_0 分别是基函数模型和原模型的会聚量.

Fig. 1 The impact of basis function scale radius on lens potential decomposition. A NFW lens potential in $250''$ is decomposed by basis functions of $m = 0$, $n \in [0, 50]$ with scale radius of $25''$, $30''$ and $35''$ respectively. The upper panel is the convergence of the basis function models with different scale radius, and the lower panel is the section diagram comparison of convergence of the basis function model and the original model. The solid line, dashed line and dotted line represent the reconstructed model, the original model and the residual between the basis function model and the original model, respectively. κ and κ_0 are the convergences of the basis function model and the original model, respectively.

图2描述了使用不同数量的基函数分解图1中的NFW透镜势的结果, 改变基函数的最大阶数 n 的同时也调整标度半径以使基函数的有效半径覆盖数据分布范围. 从图中可以看出, 基函数的阶数越高拟合结果就越好, 当阶数下降时, 基函数模型与原模型的残差就会变大. 基函数模型的波动随着最高阶数减小而增大, 中央质量尖峰的拟合效果变化尤为明显, 最高阶数越小, 基函数模型的中心尖峰越低, 与原模型的相差就越大.

2.3.2 透镜观测量的基函数分析

引力透镜效应的物理观测量, 如偏转角 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ 、会聚量 κ 和剪切量 $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, 可以由透镜势偏导函数的组合给出, 即

$$\alpha_1 = \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial B_{n,m}}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\alpha_2 = \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial B_{n,m}}{\partial y}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial x^2} + \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\psi_{xx} - \psi_{yy}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial x^2} - \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma_2 = \psi_{xy} = \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

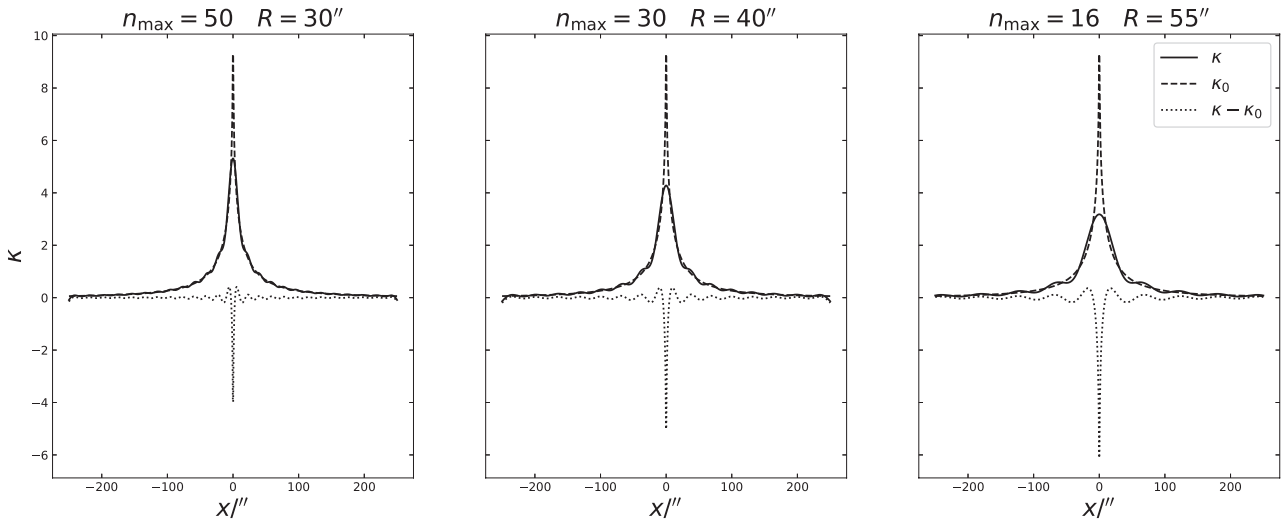


图2 使用不同数量的基函数分解图1中的NFW透镜势, 基函数的最高阶 n_{\max} 分别为50、30、16, 标度半径分别为30''、40''、55'', 实线为基函数模型, 虚线为原模型, 点线为基函数模型和原模型的残差.

Fig. 2 Decompose the NFW lens potential in Fig. 1 by different numbers of basis functions. The highest order n_{\max} of the basis functions are 50, 30 and 16, and the scale radius are 30'', 40'' and 55'', respectively. The solid line, dashed line and dotted line represent the reconstructed model, the original model and the residual between the basis function model and the original model, respectively.

极坐标和直角坐标可以相互转化 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 可得Shapelets基函数的各阶偏导函数分别为

$$\frac{\partial B_{n,m}}{\partial x} = \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+3}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} e^{-im\theta} \left[L_{\frac{n-|m|}{2}-1}^{|m|+1} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (-2x) + L_{\frac{n-|m|}{2}}^{|m|} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left(-x + \frac{|m|R^2 x}{r^2} + \frac{imyR^2}{r^2} \right) \right], \quad (18)$$

$$\frac{\partial B_{n,m}}{\partial y} = \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+3}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} e^{-im\theta} \left[L_{\frac{n-|m|}{2}-1}^{|m|+1} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (-2y) + L_{\frac{n-|m|}{2}}^{|m|} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left(-y + \frac{|m|R^2 y}{r^2} - \frac{imxR^2}{r^2} \right) \right], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial x^2} = & \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+5}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} e^{-im\theta} \left\{ L_{\frac{n-|m|}{2}-2}^{|m|+2} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (4x^2) + \right. \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}-1}^{|m|+1} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[4x^2 - 2R^2 - \frac{4R^2}{r^2} (|m|x^2 + imxy) \right] + \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}}^{|m|} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[\frac{R^4}{r^4} |m| (|m|-1) (x^2 - y^2) + \right. \\ & \left. \left. 2ixym (|m|-1) + x^2 - R^2 - \frac{2R^2}{r^2} (|m|x^2 + ixym) \right] \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial y^2} = & \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+5}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} e^{-im\theta} \left\{ L_{\frac{n-|m|}{2}-2}^{|m|+2} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (4y^2) + \right. \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}-1}^{|m|+1} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[4y^2 - 2R^2 - \frac{4R^2}{r^2} (|m|y^2 - imxy) \right] + \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}}^{|m|} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[\frac{R^4}{r^4} |m| (|m|-1) (y^2 - x^2) - \right. \\ & \left. \left. 2ixym (|m|-1) + y^2 - R^2 - \frac{2R^2}{r^2} (|m|y^2 - ixym) \right] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial x \partial y} = & \frac{(-1)^{\frac{n-|m|}{2}}}{R^{|m|+5}} \left[\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\pi \left(\frac{n+|m|}{2}\right)!} \right]^{\frac{1}{2}} r^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} e^{-im\theta} \left\{ L_{\frac{n-|m|}{2}-2}^{|m|+2} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) (4xy) + \right. \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}-1}^{|m|+1} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[4xy + \frac{2R^2}{r^2} (im(x^2 - y^2) - 2xy|m|) \right] + \\ & L_{\frac{n-|m|}{2}}^{|m|} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \left[\frac{R^4}{r^4} (im(1-|m|)(x^2 - y^2) + \right. \\ & \left. \left. 2xy|m| (|m|-1)) + xy + \frac{R^2}{r^2} (im(x^2 - y^2) - 2|m|xy) \right] \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

在Shapelets函数的导数中会出现拉盖尔多项式的指标为负数的情况, 根据拉盖尔多项式的定义, 在这种情况下拉盖尔多项式为0. 图3展示了由

基函数及其偏导函数合成的透镜物理量, 即透镜势 ψ 、偏转角 $\vec{\alpha}$ 和会聚量 κ . 可以看到当 $m = 0$ 时基函数的虚部为0.

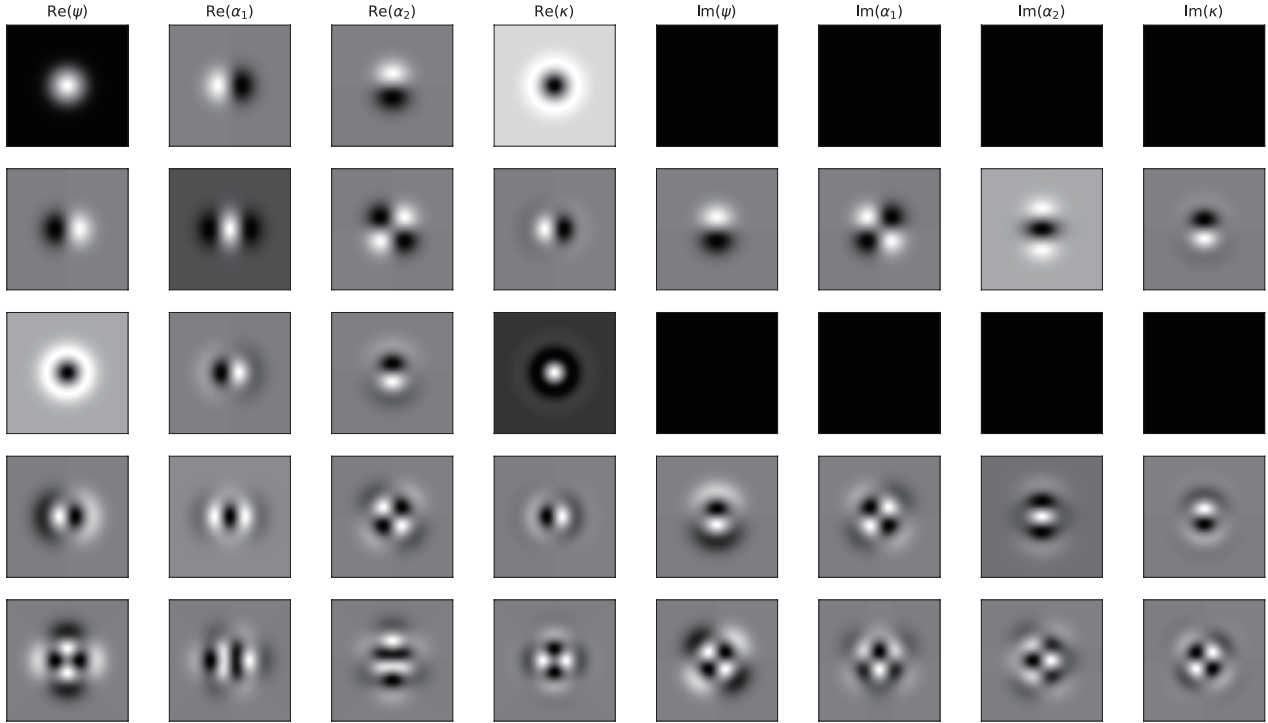


图3 图中分别展示了透镜势 ψ 、偏转角 $\vec{\alpha}$ 和会聚量 κ 的5个基函数, 其中 (n, m) 从上到下分别为 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(4, 2)$. 左边4列为基函数的实部, 右边4列为对应的虚部.

Fig. 3 The figure displays the lensing potential ψ , deflection $\vec{\alpha}$ and convergence κ of five basis functions. The (n, m) of basis functions are $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$ from top to bottom. The four columns on the left are the real parts of the basis functions, and the four columns on the right are the corresponding imaginary parts.

2.3.3 源的红移分布

在实际观测数据分析中, 源星系来自于不同红移位置, 因此需要在透镜势的定义中加入星系红移分布的权重函数. 我们将基函数模型的透镜势定义为源红移在无穷远时的透镜势 ψ_∞ , 然后将这个透镜势乘上与源红移有关的距离因子 Z 就可以得到对应红移处的透镜势, 距离因子 Z 定义为

$$Z(z_s) = \frac{D_{ds}/D_s}{\lim_{z_s \rightarrow \infty} D_{ds}/D_s} H(z_s - z_d), \quad (23)$$

其中 H 是阶梯函数, z_s 、 z_d 分别是源和透镜的红移, 当 $z_s - z_d$ 大于0时, H 等于1, 否则 H 为0. 对于红移为 z 的源, 透镜势可以表示为 $\psi_z = Z(z)\psi_\infty$.

3 重构算法

3.1 重构算法的卡方定义

引力透镜按照观测效应可以分为强引力透镜、弱引力透镜、微引力透镜^[15]. 对星系团的观测表明, 中心区域通常会存在强引力透镜效应, 出现多重像、巨型光弧、爱因斯坦环等现象. 在星系团外部则会表现为弱引力透镜效应, 使观测到的背景星系产生椭率的切向改变. 我们的重构算法利用了强透镜多重像位置和弱透镜背景星系椭率改变作为限制条件, 通过最小卡方(χ^2)拟合来求解基函数系数. 在本文工作中, 最小卡方分别包含了强透镜

(χ_s^2)和弱透镜(χ_w^2)两部分, 即 $\chi^2 = \chi_s^2 + \chi_w^2$. 其中强透镜部分的卡方估算可以定义为

$$\begin{aligned}\chi_s^2 &= \sum \frac{(\vec{\theta} - \vec{\beta} - \vec{\alpha})^2}{\sigma_s^2/|\mu|} \\ &= \sum \frac{(\vec{\theta} - \vec{\beta} - Z \sum_{n,m} f_{n,m} \vec{A}_{n,m})^2}{\sigma_s^2/|\mu|},\end{aligned}\quad (24)$$

式中 $\vec{A}_{n,m} = (\partial B_{n,m}/\partial x, \partial B_{n,m}/\partial y)$, σ_s^2 为像位置的误差, μ 为每个像位置的放大率. 通过透镜观测可以获得多重像的位置, 如果知道源位置, 那么就可以计算得到该点的偏折角, 并以偏折角为限制条件拟合出基函数系数. 然而, 实际测量中, 源的位置并不能提前预知, 我们可以将其作为未知量与基函数

$$\begin{aligned}\chi_w^2 &= \sum \frac{(\epsilon - g)(\epsilon - g)^*}{\sigma_w^2} \\ &= \sum \frac{[\epsilon - Z \sum_{n,m} f_{n,m} \Gamma_{n,m}/(1 - \kappa)] [\epsilon - Z \sum_{n,m} f_{n,m} \Gamma_{n,m}/(1 - \kappa)]^*}{\sigma_\epsilon^2(1 - |g|^2)},\end{aligned}\quad (25)$$

其中 ϵ 表示背景星系像的椭率, 有两个分量, 也表示成复数形式, $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, g 是约化剪切量, $g = \gamma/(1 - \kappa)$, $\Gamma_{n,m} = (\partial^2 B_{n,m}/\partial x^2 - \partial^2 B_{n,m}/\partial y^2)/2 + i\partial^2 B_{n,m}/\partial x\partial y$. σ_w 是像椭率的误差, σ_ϵ 是源椭率的误差, $\sigma_\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon^{(s)} \epsilon^{(s)*} \rangle}$, $\epsilon^{(s)}$ 是背景星系源椭率, $\epsilon^{(s)} = \epsilon_1^{(s)} + i\epsilon_2^{(s)}$. 弱透镜效应表现为背景星系椭率的定向改变, 源椭率、像椭率和约化剪切的关系为^[23-24]

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{\epsilon^{(s)} + g}{1 + g^* \epsilon^{(s)}}, & |g| \leq 1, \\ \frac{1 + \epsilon^{(s)*}}{\epsilon^{(s)*} + g^*}, & |g| > 1. \end{cases}\quad (26)$$

实际观测中, 通常假设背景星系的指向是完全随机的, 背景星系椭率均值为0, 其误差主要来源于背景星系椭率和指向的随机性. 在弱引力透镜范围内($|g| \ll 1$), 透镜效应较弱, 星系椭率的期望值可以由约化剪切量估算给出, 即 $E(\epsilon) \simeq g$. 弱引力透镜效应会定向拉伸背景星系, 改变椭率的误差. 因此, 假设源星系椭率的期望值为0, 像星系椭率的期望值等于约化剪切量. 在弱引力透镜效应中, 局域内观测到的背景星系图像会表现为受到定向的拉伸, 因此观测到源星系椭率误差也会受到弱引力透镜效应的影响. 在假设源星系的本征椭率期

一起拟合, 但这会使 χ_s^2 变为非线性, 导致拟合难度增加. 为了规避上述问题, 在本文中我们通过多次迭代求解来拟合得到最佳的源位置, 每次求解基函数系数时给出一个源位置的猜测值, 求得基函数系数后更新源位置的猜测值. 由于求解基函数系数时源位置是固定的, 求最小卡方相当于最小化每个像回追到源平面上的位置距源位置的猜测值之间的距离, 这是源平面上的卡方, 而多重像位置的误差直接来源于像平面上位置观测的不确定性. 因此, 我们需要把像平面上的误差映射到源平面上, 将其映射到源平面后误差可以估算为 $\sigma_s^2/|\mu|$ ^[22].

在最小卡方计算中, 弱引力透镜部分的卡方估算可定义为

望为0的情况下, 像椭率的期望值等于约化剪切量, $E(\epsilon) \simeq g$, 可以得到像椭率误差为

$$\begin{aligned}\sigma_w &= \sqrt{\langle [\epsilon - E(\epsilon)][\epsilon - E(\epsilon)]^* \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \left(\frac{\epsilon^{(s)} + g}{1 + g^* \epsilon^{(s)}} - g \right) \left(\frac{\epsilon^{(s)} + g}{1 + g^* \epsilon^{(s)}} - g \right)^* \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \frac{\epsilon^{(s)} - \epsilon^{(s)} g g^*}{1 + g^* \epsilon^{(s)}} \left(\frac{\epsilon^{(s)} - \epsilon^{(s)} g g^*}{1 + g^* \epsilon^{(s)}} \right)^* \right\rangle} \\ &\approx \sigma_\epsilon \sqrt{1 - |g|^2},\end{aligned}\quad (27)$$

在弱引力透镜范畴下, 透镜效应越强, g 越接近1, 测量椭率的标准差越小. 可以理解为, 透镜效应越强, 对背景星系的定向拉伸也越强, 从而导致测量到的椭率的随机性相对减弱.

3.2 迭代求解方法

为了获得最佳拟合的基函数系数和背景源位置, 在本文中重构算法通过迭代求解的方法来给出最小卡方的数值解. 图4展示了重构算法中迭代求解的基本流程. 理论上只要迭代次数够多, 模型总会收敛. 为了简化拟合程序, 我们采用固定迭代次数求解. 需要注意的是, 在 χ^2 计算中含有3类物理量. 第1类是已知量, 它们是需要迭代开始时作

为初始值输入到算法中的物理量, 包括像位置 $\vec{\theta}$ 、星系椭率 ϵ 、误差 σ^2 、基函数的 m 与 n 、基函数标度半径 R 和每个像位置的基函数值. 第2类是目标未知量, 即最小 χ^2 拟合中需要求解的每个基函数的系数. 第3类是未知且没有使用最小 χ^2 拟合的量, 包括会聚量 κ 、放大率 μ 、源位置 $\vec{\beta}$ 、约化剪切量 $|g|$. 针对第3类未知量, 算法将通过多次最小 χ^2 拟合迭代求解给出. 在每次做最小 χ^2 拟合时, κ 、 μ 、 $\vec{\beta}$ 和 g 都会有一个输入值, 通过线性最小 χ^2 拟合方法可以得到一组基函数系数, 并使用这个新模型的数值解作为下一次拟合迭代的输入值.

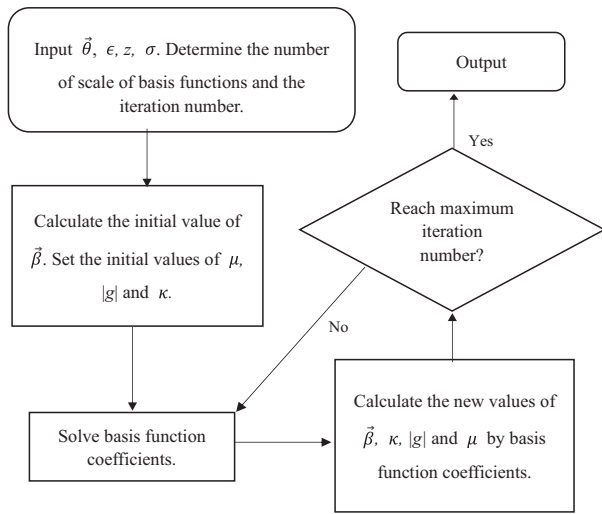


图4 基函数重构暗晕质量分布的算法流程

Fig. 4 The work flow of basis function mass reconstruction

3.2.1 源位置迭代求解

在迭代开始时, 我们给出一个源位置的初始猜测值, 这个值定为所有像位置的平均

$$\vec{\beta}_0 = \sum \vec{\theta} / n_{\text{image}}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} &= \frac{1}{(1 - \psi_{xx})(1 - \psi_{yy}) - \psi_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 \chi_{n,m}}{\partial x^2}\right) \left(1 - \sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 \chi_{n,m}}{\partial y^2}\right) - \left(\sum_{n,m} f_{n,m} \frac{\partial^2 \chi_{n,m}}{\partial xy}\right)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

n_{image} 是这个源对应的像的个数. 通过最小卡方计算出基函数系数后, 在每个像位置处的偏折角可以直接由模型获得. 如果模型求解的偏折角是真实偏折角的无偏估计, 那么源位置可以由像位置减去偏折角给出, 但是重构模型的偏折角总会偏离真实值. 在基函数系数固定时, 最佳的源位置使 χ_s^2 最小, 因此当 χ_s^2 取最小值时的源位置就是最佳的源位置, 此时有 $\partial \chi_s^2 / \partial \beta = 0$. 可求得最佳源位置为每个像位置减偏折角后再按放大率的绝对值加权平均

$$\vec{\beta} = \frac{\sum |\mu| (\vec{\theta} - \vec{\alpha})}{\sum |\mu|}, \quad (29)$$

其中 $\vec{\alpha} = \sum_{n,m} f_{n,m} \vec{A}_{n,m}$ 是根据得到的基函数系数计算的偏折角.

3.2.2 κ 和 $|g|$ 的迭代求解

在弱引力透镜框架下, κ 和 $|g|$ 小于1, 因此它们的初始值可以预设为一个小于1的数. 我们令第 i 次迭代使用的值是 κ_i 和 $|g|_i$, 求得基函数系数后, 我们可以计算出基函数模型的 κ 和 $|g|$, 定义为 κ_b 和 $|g|_b$, 然后再使用基函数模型的值计算第 $i+1$ 次迭代使用的 κ_{i+1} 和 $|g|_{i+1}$, 公式如下:

$$\kappa_{i+1} = \begin{cases} 0.99\kappa_i, & \kappa_b \leq \kappa_i, \\ 1.01\kappa_i, & \kappa_b > \kappa_i, \end{cases} \quad (30)$$

$$|g|_{i+1} = \begin{cases} 0.99|g|_i, & |g|_b \leq |g|_i, \\ 1.01|g|_i, & |g|_b > |g|_i. \end{cases} \quad (31)$$

3.2.3 μ 的更新

强透镜 χ_s^2 中放大率的初始值设为1. 每次求得一组基函数系数后, 使用这组基函数系数求出新的放大率 μ_{i+1} 在下次迭代中使用.

4 结果与讨论

为了测试重构算法的可行性, 我们通过数值方法模拟了一组基于暗晕解析模型的引力透镜系统. 透镜体的质量模型为一个椭圆NFW暗晕^[25], 特征半径 $r_s = 50''$, 特征密度 $\rho_s = 8.66 \times 10^{-22} \text{ kg/m}^3$, 轴比 $q = 0.5$, 方位角1弧度, 透镜天体的红移为 $z_d = 0.3$. 在模拟中采用的宇宙学参数为: 质量分数 $\Omega_m = 0.3$, 宇宙学常数分数 $\Omega_\Lambda = 0.7$, 哈勃常数 $h = 0.7$. 为了模拟生成强透镜系统中的多像系统, 我们在红移分别为5、1.9、0.86、0.68处共放置27个点源, 生成101个像. 在红移0.3–5之间, 半径 $250''$ 以内生成了1664个弱透镜星系概率样本.

从图2可以看出, n 最大为50时就可以比较好地描述NFW透镜势径向结构, 我们模拟使用的椭圆NFW模型是将图2上的圆NFW模型的轴比由1变

为0.5, 这个轴比的变化不会使透镜的径向结构发生太大的变化, 因此 n 最大为50就可以大致描述它的径向结构. 当数据的分布半径为 $250''$ 、 n 最大为50时, 标度半径在 $30''$ 左右比较合适. 经过测试, 我们使用 n 小于等于50, $|m|$ 小于等于36, 标度半径为 $R = 29''$ 的基函数来重构透镜模型拟合透镜体质量. 基函数的中心定为透镜中心, 而我们模拟的透镜势是中心对称的, 所以我们可以只选用基函数中的偶函数项, 即 n 、 m 都为偶数的部分.

在本文中的重构算法中, χ^2 中的 κ 、 μ 、 $\vec{\beta}$ 和 g 都是需要通过迭代来求解的. 因此, 开始的输入值会偏离真实值, 经过多次迭代接近真实值, χ^2 也会随着迭代迅速下降. 图5描述了在100次迭代中 χ^2 的变化, 可以看出 χ^2 在迭代30次以后就趋于平稳, 也表明了基于当前的模拟数据, 在我们的方法中固定迭代次数是可行的.

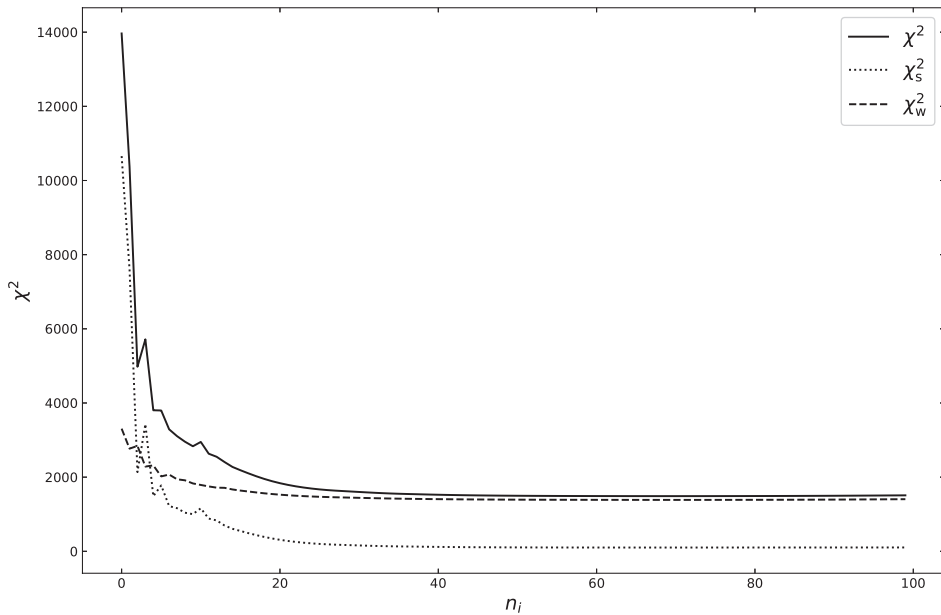


图5 迭代过程中 χ^2 的收敛. 横坐标是迭代次数, 纵坐标是 χ^2 值, 实线、点线和虚线分别表示总的 χ^2 、强透镜的 χ_s^2 和弱透镜 χ_w^2 , n_i 代表迭代次数.

Fig. 5 Convergence of χ^2 in the iterative process. The abscissa is the number of iterations, and the ordinate is the value of χ^2 .

The solid line, dotted line and dashed line represent the total χ^2 , strong lens χ_s^2 and weak lens χ_w^2 , respectively, n_i is the iteration number.

图6展示了拟合基函数模型得到的 κ 的结果, 左图是原模型, 中图是拟合结果, 右图是模型值和真实值的残差, 可以看出大部分地方的残

差比较小. 基函数能在限制数据分布范围内大致拟合出NFW的质量分布. 由于基函数的性质, 在 κ 上会有环状结构. 为了定量对比重构算法的

拟合精度, 图7是 κ 在 x 和 y 两个方向上与理论 κ 值的对比. 从图中可以看出由基函数模型给出的 κ 在中心区域的相对误差较小, 但是远离透镜中心的地方相对误差很大. 基函数不可能完全符合模型的密度轮廓, 总会有一些波动, 无论是在内部还是外部, 这个波动的大小不会有特别大的

差异, 透镜内部 κ 较大相对误差较小, 透镜外部 κ 较小相对误差会较大. 在中心部分, 由于基函数本身的特性, 无法拟合出中心的尖点, 透镜的偏折角与总的质量分布有关, 中心尖点虽然质量密度高, 但是面积小, 对总质量的影响不大.

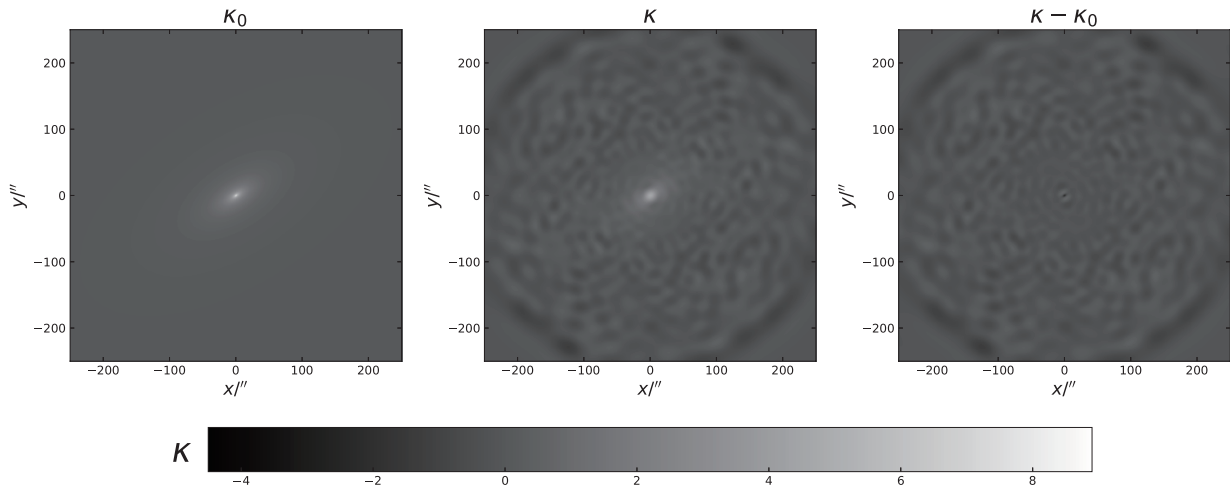


图6 κ 重构结果. 左图为原模型, 中图为基函数模型的重构结果, 右图为原模型和基函数模型的残差.

Fig. 6 The reconstruction result of κ . The left panel is the original model, the middle panel is the reconstruction result of basis function model, and the right panel is the residual of the original model and the basis function model.

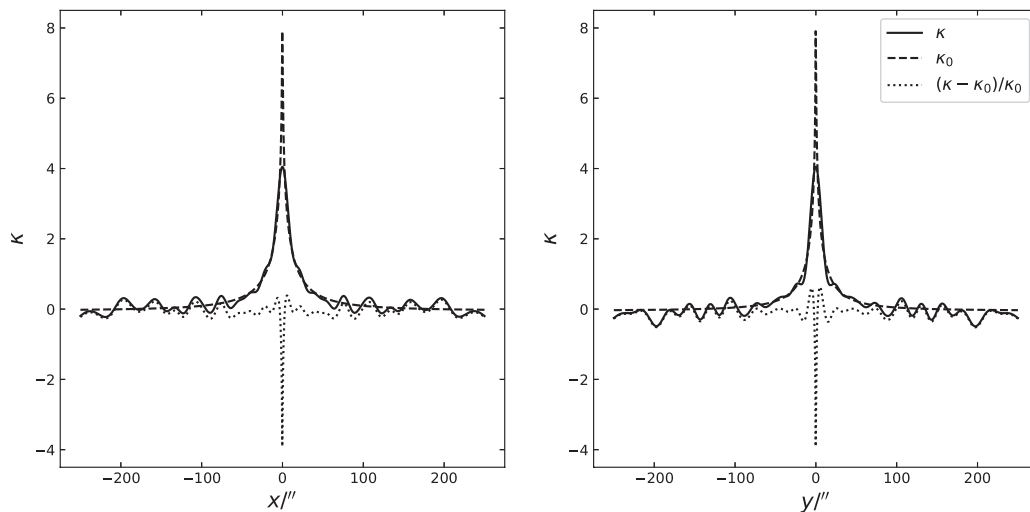


图7 两图分别为 κ 在 x 和 y 两个方向上的截面对比. 虚线是原模型, 实线是重构模型, 点线是重构结果与原模型的残差.

Fig. 7 The two panels are the cross section comparison of κ in the x and y directions. The dashed line, solid line and dotted line represent the original model, the reconstructed model and the residual between the reconstruction result and the original model, respectively.

在重构透镜质量时,背景天体的源位置作为未知量需要通过迭代计算来得到.图8展示了重构完成时源位置的拟合结果,图中圆圈和十字分别代表源位置的真实值和拟合值,同一个源位置的真实值和拟合值有点线连接.可以看到,大部分重构的源位置和真实位置的差距在 $1''$ 以内,最大误差不超过 $2''$,所有源位置的平均误差为 $0.35''$,能够比较准确地拟合出背景源的整体分布.

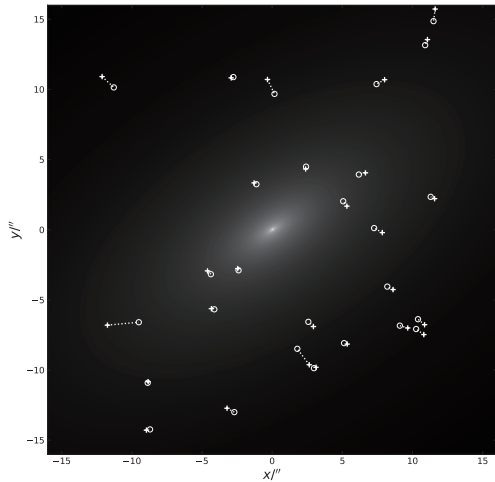


图 8 源位置真实值和拟合值.其中 \circ 为真实源位置, $+$ 为重构所得的源位置,同一个源的真实源位置和重构源位置用点线连接.

Fig. 8 The real and reconstructed location of sources. The \circ is real source location, and the $+$ is fitted source location. The real source location and the reconstructed source location of the same source are linked by dotted lines.

5 总结

在利用引力透镜观测数据测量星系团暗晕质量分布的研究中,人们发展了参数重构和非参数重构两类计算方法.参数法的拟合过程会受到模型选择的限制,导致重构模型不够灵活.而网格化非参数法重构中,未知参量往往会多于限制条件的个数.在本文中,我们发展了一套使用基函数构建透镜模型的方法,在保证模型自由度的情况下减少未知参量的个数,一定程度上规避了参数法和网格化非参数法的缺点.

基于NFW的理论透镜模型,我们生成了模拟的多重像数据和背景星系团率数据,测试了重构算

法的有效性.通过迭代求解基函数系数和多重像源位置,可以快速得到透镜体的质量分布.新的重构算法能在限制数据分布范围内整体拟合出透镜的质量分布,迭代求解拟合出的源位置也与真实的源位置基本保持一致.

本文工作中,目前已测试了新方法对单个暗晕的拟合结果,然而真实观测的星系团暗晕会包含多个子暗晕.为了将新的重构算法应用于未来的星系团暗晕质量分布测量,对于主暗晕,无论参数法中需要多少暗晕模型都可以使用基函数进行统一拟合.对于星系团中的子暗晕,可以采用与参数模型相似的方法来处理,即每个子暗晕都假定为具有相同的质量模型,且每个子暗晕的质量与星系光度相关.这样做既能避免选择不合适的模型使得重构算法无法准确描述暗晕质量分布,又能避免因基函数分辨率不足造成难以显示暗晕中的子结构,从而为星系团质量测量提供一套灵活且高效的 reconstruc-

参考文献

- [1] Spergel D N, Verde L, Peiris H V, et al. *ApJS*, 2003, 148: 175
- [2] Bond J R, Cole S, Efstathiou G, et al. *ApJ*, 1991, 379: 440
- [3] Kauffmann G, White S D M, Guiderdoni B. *MNRAS*, 1993, 264: 201
- [4] Mantz A B, von der Linden A, Allen S W, et al. *MNRAS*, 2015, 446: 2205
- [5] Stockton A. *ApJ*, 1980, 242: L141
- [6] Tyson J A, Valdes F, Wenk R A. *ApJ*, 1990, 349: L1
- [7] Broadhurst T, Benítez N, Coe D, et al. *ApJ*, 2005, 621: 53
- [8] Meneghetti M, Natarajan P, Coe D, et al. *MNRAS*, 2017, 472: 3177
- [9] Oguri M. *PASJ*, 2010, 62: 1017
- [10] Jullo E, Kneib J P. *MNRAS*, 2009, 395: 1319
- [11] Liesenborgs J, De Rijcke S, Dejonghe H. *MNRAS*, 2006, 367: 1209
- [12] Coe D, Benítez N, Broadhurst D, et al. *ApJ*, 2010, 723: 1678
- [13] Coe D, Fuselier E, Benítez N, et al. *ApJ*, 2008, 681: 814
- [14] Bradač M, Treu T, Applegate D, et al. *ApJ*, 2009, 706: 1201
- [15] Schneider P, Kochanek C S, Wambsganss J. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. Heidelberg: Springer, 2006

- [16] Refregier A. MNRAS, 2003, 338: 35
- [17] Refregier A, Bacon D. MNRAS, 2003, 338: 48
- [18] Kuijken K. A&A, 2006, 456: 827
- [19] Birrer S, Amara A, Refregier A. ApJ, 2015, 813: 102
- [20] Massey R, Refregier A. MNRAS, 2005, 363: 197
- [21] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. ApJ, 1997, 490: 493
- [22] Keeton C R. arXiv: astro-ph/0102341
- [23] Schneider P, Seitz C. A&A, 1995, 294: 411
- [24] Umetsu K. A&ARv, 2020, 28: 7
- [25] Golse G, Kneib J P. A&A, 2002, 390: 821

Gravitational Lensing Mass Reconstruction Method Based on Shapelets Basis Functions

LIU Kai-zhou^{1,2} WEI Cheng-liang¹ NIE Lin^{1,2}

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)

(2 College of Astronomy and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

ABSTRACT The gravitational lensing effect is one of the most effective probes for detecting the distribution of mass in galaxy clusters. To date, the methods of gravitational lensing mass reconstructions can be divided into two categories, parametric methods and non-parametric methods. However, due to the model assumptions and computational resolution, the available reconstruction methods still have a number of problems that need to be solved. The method of gravitational lens mass reconstruction based on Shapelets basis function is used to reconstruct the gravitational lens mass. The Shapelets basis function is used to decompose the gravitational lens potential, and the basis function coefficients are iteratively calculated by the constraints of the multiple image position and the background galaxy ellipticity distortion of gravitational lensing. The new method is validated by fitting the mock data from NFW (Navarro, Frenk and White) lensing model. The results show the gravitational lensing mass distribution can be reconstructed reasonably by our new method and the source position can be calculated accurately. Our new method provides a flexible and efficient method for gravitational lensing mass reconstruction.

Key words gravitational lensing: strong gravitational lensing, gravitational lensing: weak gravitational lensing, dark matter halo: mass distribution