第62卷 第5期 天 文 学 报 Vol.62 No.5
2021年9月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Sept., 2021

doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2021.05.009

Hansen系数递推的效率*

吴连大[1†] 张明江[1,2‡]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)

(2 中国科学院空间目标与碎片观测重点实验室 南京 210023)

摘要 探讨了偏心率函数的递推方法的效率, 给出了一种成批递推方法, 其计算效率明显优于直接计算方法, 而且递推是正向的. 采用该成批递推方法递推时, 偏心率函数的量级从小到大变化, 可以保证递推的精度.

关键词 天体力学, 摄动理论: 摄动函数及其展开方法, 方法: 数值

中图分类号: P133; **文献标识码**: A

1 Hansen系数的基本递推关系

对于Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$(其中, n、m和k是Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的3个指标)的递推计算, Giacaglia[1]和McClain[2]给出了多个递推关系式. 在文献[3]中, 我们列出了Giacaglia和McClain给出的这些递推关系式中, 仅有的5个独立的递推公式(R1)–(R4)式和(R*)式, 其中(R1)–(R4)式是常用的基本递推关系式(其具体表达式参见附录); 还推导给出了两个新的Hansen系数的递推关系式(R5)和(R6)式.

基本递推关系式(R1)和(R3)式, 可以用来进行偏心率函数$G_{l,p,q} = X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}$的递推. 将基本递推关系式(R1)和(R3)式中的Hansen系数换成偏心率函数, 相应的偏心率函数$G_{l,p,q}$的递推公式即为[1]:

$$\begin{cases}(l-2p+q)\sqrt{1-e^2}G_{l-2,p-1,q} = (l-2p)(1-e^2)G_{l,p,q}+ \\ \frac{(l-1)e}{2}(G_{l-1,p-1,q-1} - G_{l-1,p,q+1}),\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}(1-e^2)^2G_{l,p,q} = \left(1-\frac{e^2}{2}\right)G_{l-2,p-1,q} + (1-e^2)e(G_{l-1,p-1,q-1} + G_{l-1,p,q+1})- \\ \frac{e^2}{4}(G_{l-2,p-2,q-2} + G_{l-2,p,q+2}),\end{cases} \tag{2}$$

其中, l、p和q是偏心率函数$G_{l,p,q}$的3个指标, e是轨道偏心率.

2021-02-03收到原稿, 2021-03-22收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11873096)资助

†wld@pmo.ac.cn

‡mjzhang@pmo.ac.cn

2 递推公式的特点

观察Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的递推公式(包括其他文献, 如文献[4]中所列递推公式), 我们发现它们具有一个显著特点: 递推公式中Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$的下标k均是相同的. 由于我们需要计算得到很多k值的Hansen系数, 从而必须对每一个k值的Hansen系数进行递推, 每改变一个k值, 递推就要重新开始, 相应的递推初值需要重新计算, 这就严重影响了递推的效率.

另外, 利用指标k等于常数的递推方法, 计算得到的Hansen系数, 不一定是我们所需要的. 我们知道Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$含有$e^{|k-m|}$的因子, 对于相同的指标k, 不同指标m的$X_k^{-(n+1),m}$和$X_k^{n,m}$大小是不一样的. 例如, $X_k^{-(n+1),n}$与$X_k^{-(n+1),-n}$, 当$k \geqslant n$时两者大小就相差了e^{2n}; 如果$n = 10$, $e = 0.1$, 这两个Hansen系数就相差了20个数量级. 然而, Giacaglia[1]和McClain[2]给出的递推方法, 均将$X_k^{-(n+1),n}$与$X_k^{-(n+1),-n}$这两个Hansen系数同时计算出来. 这显然是不需要也不合理的.

3 直接计算方法和递推方法的计算效率比较

众所周知, 使用递推方法的目的是为了提高计算效率. 下文, 我们举例比较Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$直接计算方法和利用k等于常数的递推方法的计算效率.

假定需要考虑的地球引力场摄动函数的最高阶为100, 偏心率函数$G_{l,p,q}$的指标q的求和范围为$[-10, 10]$, 那么需要计算的偏心率函数$G_{l,p,q}$的总数为: $5148 \times 21 = 108108$. 考虑到Hansen系数的对称性, 实际只需要计算54079个即可, 这就是偏心率函数$G_{l,p,q}$的直接计算方法所需要的计算量.

然而, 采用偏心率函数$G_{l,p,q} = X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}$的$k = l-2p+q$等于常数的递推方法, 通过递推关系式(R1)、(R3)和(R6)的向前递推计算, 通过递推关系式(R1)的向后递推计算, 均需要两行初值[3], 相应地, 偏心率函数$G_{l,p,q}$向前递推、向后递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{f}}$和$\tilde{Q}_{\mathrm{b}}$分别为:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{\mathrm{f}} = 7 \times \tilde{K} + 108101 \times \tilde{K} \times \frac{T_{\mathrm{r}}}{T_{\mathrm{d}}}, \\ \tilde{Q}_{\mathrm{b}} = 201 \times \tilde{K} + 107907 \times \tilde{K} \times \frac{T_{\mathrm{r}}}{T_{\mathrm{d}}}, \end{cases} \tag{3}$$

其中, $\tilde{K}$是由偏心率函数$G_{l,p,q}$的3个指标l、p和q所确定的一个常数, T_{r}是递推计算时间, T_{d}是直接计算时间; 按照上述与直接计算方法同样的要求, 考虑到Hansen系数的对称性, $\tilde{K} = 111$.

如果假定递推计算时间与直接计算时间之比$T_{\mathrm{r}}/T_{\mathrm{d}} = 0.01$, 则由(3)式可得, 偏心率函数$G_{l,p,q}$向前递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{f}} \approx 120769$, 向后递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{b}} \approx 142088$, 这时偏心率函数$G_{l,p,q}$的递推计算显然是不合算的. 即使递推计算时间与直接计算时间之比$T_{\mathrm{r}}/T_{\mathrm{d}} = 0.003$, 由(3)式可得, 偏心率函数$G_{l,p,q}$向前递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{f}} \approx 36775$, 向后递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{b}} \approx 58244$, 这时偏心率函数$G_{l,p,q}$的递推计算, 只有向前递推是合算的, 其计算效率比直接计算方法高. 此外, 由(3)式还不难看出, 即使递推时间$T_{\mathrm{r}} = 0$, 偏心率函数$G_{l,p,q}$向后递推的计算量$\tilde{Q}_{\mathrm{b}}$, 约是直接计算方法的计算量的41.26%, 相应的计算效率仅提高约1.42倍. 因此, 有必要进一步研究效率更高的偏心率函数$G_{l,p,q}$的递推方法.

4 一种效率较高的偏心率函数的递推方法—成批递推

本节探讨效率较高的偏心率函数$G_{l,p,q}$的递推方法, 即成批递推方法. 成批递推方法的核心, 仍然是基本递推关系(R1)式向后递推、(R1)和(R3)式向前递推(参见文献[3]), 只是改用(1)式和(2)式作为递推计算公式.

我们先分析利用递推公式(1)式的向后递推方法, 相应的递推初值为:

$$\begin{cases} G_{l,p,q} \quad (p=0,1,\cdots,l; q=-Q\sim+Q), \\ G_{l-1,p,q} \quad (p=0,1,\cdots,l-1; q=-Q\sim+Q), \end{cases}$$

其中, Q为指标q的最大值. 在递推时, 指标p的取值为$1,2,\cdots,l-1$(未考虑偏心率函数的对称性), 即可计算出:

$$G_{l-2,p-1,q} \quad (p=1,2,\cdots,l-1; q=-Q\sim+Q).$$

对指标l进行循环, 即l取值从L到4(L为指标l的最大值), 就可将所有需要的偏心率函数$G_{l,p,q}$都递推计算出来. 当然, 也可以一次一次地递推, 每递推一次, 就可计算出一个l的摄动, 这样可以节省数据的存储量. 但是, 这种递推是不完整的, 有两个问题需要注意: (1)当$l-2p+q=0$时, 需要利用指标$k=0$的Hansen系数, 即$X_0^{-(n+1),m}$的递推方法计算; (2) 当$q=\pm Q$时, 递推公式(1)式中$(G_{l-1,p-1,q-1}-G_{l-1,p,q+1})$会出现没有初值的问题, 需要利用Hansen系数的直接计算方法计算.

不难看出, 上述这种递推方法中, 有3个q值的偏心率函数$G_{l,p,q}$, 需要“另外计算”. 也就是说, 当$Q=10$时, 21个q值中, 有3个不能递推, 但还有18个q值的偏心率函数$G_{l,p,q}$是可以递推的. 利用偏心率函数的对称性[1]: $G_{l,p,q}=G_{l,l-p,-q}$, 偏心率函数$G_{l,p,q}$的计算量又可以减少一半, 计算效率要比逐个指标k等于常数的递推方法高得多. 然而, 值得指出的是, 利用递推公式(1)式向后递推的成批递推方法还存在显著缺点: 一方面, 需要提供高阶偏心率函数的初值, 当偏心率较大时可能初值误差较大; 另一方面, 从数量级大的偏心率函数向数量级小的偏心率函数递推, 容易损失有效位数.

为了克服上述这些显著缺点, 我们可以利用递推公式(2)式的向前递推方法. 为了得到所有的指标p和q的偏心率函数$G_{l,p,q}$, 指标p必须为$0,1,\cdots,l$, 这时就可能出现p超标的情况. 此外, 与上述利用递推公式(1)式的向后递推方法一样, 还存在q超标的情况, 可能超标的情况如表1所示. 由表1可知, 利用递推公式(2)式的向前递推方法, $p=0$、$p=1$、$p=l-1$、$p=l$、$q=-Q$、$q=-Q+1$、$q=Q-1$和$q=Q$的偏心率函数$G_{l,p,q}$必须直接计算, 无法递推. 根据偏心率函数的对称性, $p=l-1$和$p=l$的超标情况可以规避掉. 利用递推公式(2)式的偏心率函数$G_{l,p,q}$向前递推计算没有奇点也没有e分母, 其计算量相对利用递推公式(1)式的向后递推方法更大; 通过偏心率函数的对称性, 计算量可以减少一半, 计算量还是可以接受的.

如果在$l-2p\neq0$时, 使用递推公式(1)式向前递推, 类似地(1)式中的相关项在$p=0$、$p=l$和$q=\pm Q$情况下超标. 而使用递推公式(2)式只向前递推计算$l-2p=0$的情况(亦即$p=l/2$ 的情况), (2)式中的相关项仅在$q=\pm(Q-1)$和$q=\pm Q$情况下超标. 这样, 能够克服利用递推公式(1)式向后递推的显著缺点, 降低利用递推公式(2)式向前递推的计算量. 相应地对于上文第3节中同样的计算要求, 即假定需要考虑的地球引力场摄动函

数的最高阶为100, 偏心率函数$G_{l,p,q}$的指标q的求和范围为$[-10, 10]$, 利用递推公式(1)式和(2)式的向前递推方法, 同时借助偏心率函数的对称性, 偏心率函数$G_{l,p,q}$的成批递推的计算量$\tilde{Q}$为:

$$\begin{cases} \tilde{Q} = \tilde{Q}_{\rm d} + \tilde{Q}_{\rm r} \times \frac{T_{\rm r}}{T_{\rm d}}, \\ \tilde{Q}_{\rm d} = 21 + 11 + 2 \times 21 + 49 \times 2 + 97 \times 19 + \sum_{l=4}^{100} \left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil \times 2 = 7107, \\ \tilde{Q}_{\rm r} = 54079 - \tilde{Q}_{\rm d} = 46972, \end{cases} \tag{4}$$

其中, $\tilde{Q}_{\rm d}$、$\tilde{Q}_{\rm r}$分别为偏心率函数的直接计算个数和递推计算个数, $T_{\rm r}/T_{\rm d}$表示递推计算时间与直接计算时间之比, $\lceil\cdot\rceil$表示取整数. 如果假定$T_{\rm r}/T_{\rm d} = 0.01$, 则由(4)式可得, 偏心率函数$G_{l,p,q}$成批递推的计算量$\tilde{Q} \approx 7577$, 仅为直接计算方法的计算量的14.01%, 相应的计算效率比直接计算方法可提高约6.14倍; 如果假定$T_{\rm r}/T_{\rm d} = 0.003$, 则偏心率函数$G_{l,p,q}$成批递推的计算量$\tilde{Q} \approx 7248$, 仅为直接计算方法的计算量的13.40%, 相应的计算效率比直接计算方法可提高约6.46倍. 同时, 偏心率函数的这种成批递推方法的计算效率, 也比相应的k等于常数的递推方法高得多.

表 1 利用递推公式(2)式的向前递推方法, 偏心率函数$G_{l,p,q}$成批递推计算中可能超标的情况

Table 1 The cases that the indexes p and q exceed the limit in the batch recursion of eccentricity functions $G_{l,p,q}$ using Eq. (2) to perform the forward recursion

Term	The case that p exceed the limit	The case that q exceed the limit
$G_{l-2,p-1,q}$	$p=0,\quad p=l$	
$G_{l-1,p-1,q-1}$	$p=0$	$q=-Q$
$G_{l-1,p,q+1}$	$p=l$	$q=Q$
$G_{l-2,p-2,q-2}$	$p=0,\quad p=1$	$q=-Q,\quad q=-Q+1$
$G_{l-2,p,q+2}$	$p=l-1,\quad p=l$	$q=Q-1,\quad q=Q$

综上, 基于递推公式(1)式和(2)式[1]的向前递推方法, 我们就给出了一种效率较高的偏心率函数的成批递推方法, 这时相应的递推公式即为:

$$G_{l,p,q} = \begin{cases} \frac{1}{(1-e^2)^2}\Big[\Big(1-\frac{e^2}{2}\Big)G_{l-2,p-1,q} + (1-e^2)e(G_{l-1,p-1,q-1} + G_{l-1,p,q+1}) - \\ \qquad \frac{e^2}{4}(G_{l-2,p-2,q-2} + G_{l-2,p,q+2})\Big], \qquad (l-2p=0), \\ \frac{1}{(l-2p)(1-e^2)}\Big[(l-2p+q)\sqrt{1-e^2}G_{l-2,p-1,q} - \\ \qquad \frac{(l-1)e}{2}(G_{l-1,p-1,q-1} - G_{l-1,p,q+1})\Big], \qquad (l-2p \neq 0). \end{cases} \tag{5}$$

这种成批递推方法的最大好处是: 它需要的初值少, 从量级小的偏心率函数到量级大的偏心率函数递推, 能够保证递推计算的精度.

5 结论

本文简单分析了Hansen系数递推公式的特点, 举例比较了Hansen系数$X_k^{-(n+1),m}$的直接计算方法和k等于常数的递推方法的计算效率, 指出有必要研究效率较高的递推计

算方法. 进而, 基于递推公式(1)式和(2)式的向前递推方法, 我们给出了一种效率较高的偏心率函数$G_{l,p,q}$的成批递推方法. 该成批递推方法不仅需要的初值少, 而且从量级小的偏心率函数到量级大的偏心率函数递推, 能够保证递推计算的精度; 其计算效率明显优于直接计算方法, 比相应的k等于常数的递推方法高得多.

附录

Hansen系数的基本递推关系式(R1)–(R4)式[1–3]:

$$m\sqrt{1-e^2}X_k^{-(n+2),m} = \frac{ne}{2\sqrt{1-e^2}}\left[X_k^{-(n+1),m-1} - X_k^{-(n+1),m+1}\right] + kX_k^{-n,m}, \tag{R1}$$

$$(1-e^2)X_k^{-(n+1),m} = X_k^{-n,m} + \frac{1}{2}e\left[X_k^{-n,m+1} + X_k^{-n,m-1}\right], \tag{R2}$$

$$\begin{cases}(1-e^2)^2X_k^{-(n+2),m} = (1-e^2)e\left[X_k^{-(n+1),m+1} + X_k^{-(n+1),m-1}\right] + \\ (1-\frac{e^2}{2})X_k^{-n,m} - \frac{e^2}{4}\left[X_k^{-n,m+2} + X_k^{-n,m-2}\right],\end{cases} \tag{R3}$$

$$\begin{cases}(m-n-1)e^2X_k^{-(n+1),m-2} + 2(2m-n-1)eX_k^{-(n+1),m-1} + \\ \left[4m+2me^2-4k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{-(n+1),m} + \\ 2(n+2m+1)eX_k^{-(n+1),m+1} + (n+m+1)e^2X_k^{-(n+1),m+2} = 0,\end{cases} \tag{R4}$$

其中, n、m和k是Hansen系数的3个指标, e为轨道偏心率.

参 考 文 献

[1] Giacaglia G E O. CeMec, 1976, 14: 515

[2] McClain W D. A Recursively Formulated First-Order Semianalytic Artificial Satellite Theory Based on the Generalized Method of Averaging. Volume II. The Explicit Development of the First-Order Averaged Equations of Motion for the Nonspherical Gravitational and Nonresonant Third-Body Perturbations. NASA CR-156783, 1978

[3] 吴连大, 张明江. 天文学报, 2021, 62: 34

[4] Vakhidov A A. CeMDA, 2001, 81: 177

Computational Efficiency of the Recursion of Hansen Coefficents

WU Lian-da[1] ZHANG Ming-jiang[1,2]

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)
(2 Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)

ABSTRACT Computational efficiency of the recursion of eccentricity funtions is investigated, and a kind of batch recursion method is given. Its computational efficiency is significantly superior to the direct calculation method. Moreover, this kind of batch recursion is forward so that the magnitudes of eccentricity funtions experience from small to large change in the recursive process. Hence in this way the high accuracy of the recursion of eccentricity funtions can be guaranteed.

Key words celestial mechanics, perturbation theory: perturbation function and its expansion method, methods: numerical