doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2021.05.001

Hansen系数及其导数的直接计算方法*

吴连大[1†]　张明江[1,2‡]

(1 中国科学院紫金山天文台 南京 210023)
(2 中国科学院空间目标与碎片观测重点实验室 南京 210023)

摘要　回顾总结了7种Hansen系数及其导数的直接计算方法, 比较分析了这些方法的计算效率和计算稳定性. 研究表明: Hansen系数的递推关系可以用来判别计算结果的稳定性. 最后指出, Wnuk方法(双精度计算)和McClain方法(4精度计算)是稳定的, 可以用来计算人造卫星轨道摄动. 由于大多数人造卫星采用小偏心率轨道, 需要计算无奇点摄动, 推荐使用McClain方法1 (4精度计算).

关键词　天体力学, 摄动理论: 摄动函数及其展开方法, 方法: 数值
中图分类号: P133;　**文献标识码**: A

1　引言

在天体力学的分析理论中, 需要将摄动函数展开为时间和轨道根数的显函数, 这涉及到两个最常用的特殊函数: 倾角函数和Hansen系数[1]. 在卫星动力学中, 地球引力场和日月第3体引力摄动的摄动函数展开即与Hansen系数有关[2–3].

Balmino[4]、Wnuk[5]、Giacaglia[6]、McClain[7]和Proulx等[8]给出了Hansen系数的各种直接计算表达式. 利用这些Hansen系数的直接计算表达式, 对轨道偏心率e直接求导, 我们可以得到相应的Hansen系数导数的直接计算表达式. 基于Hansen系数的定积分表达式及其直接求导的导数表达式, 也可以实现Hansen系数及其导数的直接计算. 此外, Wnuk[5]还给出了另一种Hansen系数导数的直接计算表达式. 这样, 对于Hansen系数及其导数的直接计算, 本文回顾总结出7种主要方法: Balmino方法[4]、Wnuk方法[5]、Wnuk直接求导方法、Giacaglia方法[6]、两种McClain方法[7–8]和定积分方法. 这些计算方法涉及的具体数学表达式, 参见附录. 需要说明的是, 附录相关计算方法的数学表达式中, 求和指标的符号遵照了原文献的形式, 以便读者查阅原文.

本文针对这7种Hansen系数及其导数的直接计算方法, 重点探讨各种方法的计算效率以及稳定性, 进而得到一些有益的结论, 为实际应用中Hansen系数及其导数的计算提供参考.

2020-11-24收到原稿, 2021-03-06收到修改稿
*国家自然科学基金项目(11873096)和中国科学院青年创新促进会(2017367)资助
†wld@pmo.ac.cn
‡mjzhang@pmo.ac.cn

2 计算效率

为了比较分析, 我们编制了这7种Hansen系数及其导数的直接计算方法的Fortran程序, 包括:

(1) Balmino方法[4], 即附录中表达式(1a)和(1b), 其中指标t的求和限为0–50;

(2) Wnuk方法[5], 即附录中表达式(2a)和(2b), 其中指标s的求和限为0–70, 指标t的求和限为-70至70;

(3) Wnuk直接求导方法, 即附录中表达式(3a)和(3b), 其中指标s的求和限为0–70, 指标t的求和限为-70至70, 注意附录中表达式(2a)和(3a)实质上是相同的;

(4) Giacaglia方法[6], 即附录中表达式(4a)和(4b), 其中, 当指标$l \neq p$时, 指标s的求和限为0–70; 当指标$p \neq 0$时, 指标t的求和限为0–70;

(5) McClain方法1[7–8], 即附录中表达式(5.1a)和(5.1b), 其中指标i的求和限为0–70;

(6) McClain方法2[7–8], 即附录中表达式(5.2a)和(5.2b), 其中指标i的求和限为0–70;

(7)定积分方法, 即附录中表达式(6a)和(6b), 使用分段两点Gauss积分方法, 分段数为2000.

利用上述7种方法, 计算偏心率函数$G_{lpq} = X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}$ ($l \in [2,30], p \in [0,l], q \in [-2, 2]$, $e = 0.1$)及其导数, 各种方法的计算时间, 如表1所示. 计算设备的基本配置参数为: 处理器Intel® Xeon® W-2125 CPU @ 4.00 GHz (8 CPUs), 主频约4.0 GHz; 内存32768 MB RAM. 由表1可见, 各种方法的计算效率差别很大, 在具体使用时需要注意. 另外, 需要注意的是, 目前本文中各种计算方法所采用的相应指标的求和限未必最优, 读者在使用时应根据需要进行必要的数值试验, 以确定指标合适的求和限. 实际上, 各种计算方法中指标的求和限选取, 主要取决于偏心率的大小和需要计算的Hansen系数的阶次.

表 1 各种方法的计算时间

Table 1 Computing time of various methods

Method	Expressions in Appendix	Time/s
Balmino's method[4]a	Eqs. (1a) and (1b)	364.127
Wnuk's method[5]a	Eqs. (2a) and (2b)	49.317
Wnuk's direct derivation method[a]	Eqs. (3a) and (3b)	16.715
Giacaglia's method[6]a	Eqs. (4a) and (4b)	4.827
McClain's first method[7–8]a	Eqs. (5.1a) and (5.1b)	0.031
McClain's first method[7–8]b		0.329
McClain's second method[7–8]a	Eqs. (5.2a) and (5.2b)	0.422
McClain's second method[7–8]b		11.607
Definite integral[a]	Eqs. (6a) and (6b)	0.719

[a] Double precision computation;

[b] Quadruple precision computation.

3 稳定性分析

Wnuk[5]对相关Hansen系数及其导数直接计算方法的稳定性, 有过简约的评价:

(1)利用改造Bessel函数(渐近展开)算法的Wnuk方法, 对应附录(2a)和(2b)式, 是数字稳定的, 对于偏心率$e<1$以及高阶l、p和q, 能进行偏心率函数$G_{lpq}=X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}$及其导数的快速计算;

(2) Kaula方法[2] (与McClain方法2本质上相同, 对应附录(5.2*)、(5.2a)和(5.2b)式), 对于大偏心率是数字不稳定的;

(3)定积分方法, 对应附录(6a)和(6b)式, 对于大偏心率e情形计算得很好, 但由于计算时间和数字不稳定性, 在实际应用中对高阶l、p和q的偏心率函数计算受到限制.

下面, 我们结合上述7种Hansen系数及其导数的直接计算方法的Fortran程序计算算例, 较深入地分析这些方法的计算稳定性.

3.1 Hansen系数计算的不稳定性例子

计算结果表明: 对于小偏心率($e<0.2$), 各种方法计算均是稳定的. 但是, 对于大偏心率, Hansen系数计算会出现不稳定的情况. 例如, 对于偏心率$e=0.6$, Hansen系数的相关计算结果, 见表2.

由表2中计算结果可见, 对于Hansen系数的直接计算, Wnuk方法(Wnuk直接求导方法)和Giacaglia方法(即附录(3a)和(4a)式)的计算结果符合得较好(附录(2a)与(3a)式实质相同); 定积分方法(即附录(6a)式)的计算结果与Wnuk方法、Giacaglia方法整体上一致. 然而, Balmino方法和McClain方法1 (即附录中(1a)和(5.1a)式)的计算结果与Wnuk方法相比, 从$q\geqslant-4$开始就符合得不好了; McClain方法2 (即附录中(5.2a)式)的计算结果与Wnuk方法相比, 从$q\geqslant 6$开始符合得不好了. 计算表明: 这些方法在大偏心率高阶的情况下, 出现了不稳定的情况. 这种不稳定现象的根源在于计算机字长不够, 如果采用4精度计算, 结果就稳定了.

表 2 Hansen系数计算算例($e=0.6$)

Table 2 The calculation example of Hansen coefficients ($e=0.6$)

l	p	q	k	Balmino's method Eq. (1a)	Wnuk's method Eq. (2a) or Eq. (3a)	Giacaglia's method Eq. (4a)
30	2	−20	6	$0.2933226736230\times10^{-3}$	$0.2933228305423\times10^{-3}$	$0.2933228305424\times10^{-3}$
30	2	−18	8	$0.5309383355001\times10^{-3}$	$0.5309386709805\times10^{-3}$	$0.5309386709814\times10^{-3}$
30	2	−16	10	$0.9610462350119\times10^{-3}$	$0.9610469516074\times10^{-3}$	$0.9610469515368\times10^{-3}$
30	2	−14	12	$0.1741837353609\times10^{-2}$	$0.1741838878819\times10^{-2}$	$0.1741838878990\times10^{-2}$
30	2	−12	14	$0.3145381144114\times10^{-2}$	$0.3145384429887\times10^{-2}$	$0.3145384444067\times10^{-2}$
30	2	−10	16	$0.5713014458487\times10^{-2}$	$0.5713019249437\times10^{-2}$	$0.5713019508569\times10^{-2}$
30	2	−8	18	$0.9461086721272\times10^{-2}$	$0.9461146987153\times10^{-2}$	$0.9461143694266\times10^{-2}$
30	2	−6	20	$0.2825249919785\times10^{-1}$	$0.2825215025931\times10^{-1}$	$0.2825214335873\times10^{-1}$
30	2	−4	22	$0.8225223041839\times10^{-3}$	$0.8033676578715\times10^{-3}$	$0.8034028294691\times10^{-3}$
30	2	−2	24	$-0.4021604510865\times10^{-1}$	$-0.4067986999474\times10^{-1}$	$-0.4067958336874\times10^{-1}$

表 2 续

Table 2 Continued

30	2	0	26	$0.8428871740799\times10^{0}$	$0.8432289687375\times10^{0}$	$0.8432306545436\times10^{0}$
30	2	2	28	$0.1237497202556\times10^{1}$	$0.1202531503930\times10^{1}$	$0.1202530599134\times10^{1}$
30	2	4	30	$-0.7293788189538\times10^{1}$	$-0.7368422870064\times10^{1}$	$-0.7368420896391\times10^{1}$
30	2	6	32	$-0.1660458591396\times10^{2}$	$-0.1596440454204\times10^{2}$	$-0.1596440183564\times10^{2}$
30	2	8	34	$0.6775794632054\times10^{0}$	$0.4091453393401\times10^{2}$	$0.4091453102328\times10^{2}$
30	2	10	36	$0.9138903908292\times10^{2}$	$0.1881260389012\times10^{3}$	$0.1881260350363\times10^{3}$
30	2	12	38	$0.1528259816376\times10^{4}$	$0.1102086701962\times10^{3}$	$0.1102086656476\times10^{3}$
30	2	14	40	$0.6358866386921\times10^{4}$	$-0.8444945803511\times10^{3}$	$-0.8444945808309\times10^{3}$
30	2	16	42	$-0.9457988143437\times10^{3}$	$-0.2478127773453\times10^{4}$	$-0.2478127776352\times10^{4}$
30	2	18	44	$0.4031796088651\times10^{4}$	$-0.1719989741133\times10^{4}$	$-0.1719989739774\times10^{4}$
30	2	20	46	$0.3729702671857\times10^{6}$	$0.7099282454119\times10^{4}$	$0.7099282455750\times10^{4}$

l	p	q	k	McClain's first method Eq. (5.1a)	McClain's second method Eq. (5.2a)	Definite integral Eq. (6a)
30	2	-20	6	$0.2933228305424\times10^{-3}$	$0.2933228316203\times10^{-3}$	$0.2825986040143\times10^{-3}$
30	2	-18	8	$0.5309386709821\times10^{-3}$	$0.5309386721472\times10^{-3}$	$0.5177569571270\times10^{-3}$
30	2	-16	10	$0.9610469515536\times10^{-3}$	$0.9610469664404\times10^{-3}$	$0.9501852916158\times10^{-3}$
30	2	-14	12	$0.1741838879079\times10^{-2}$	$0.1741838950784\times10^{-2}$	$0.1728408552953\times10^{-2}$
30	2	-12	14	$0.3145384444781\times10^{-2}$	$0.3145384658439\times10^{-2}$	$0.3131415207725\times10^{-2}$
30	2	-10	16	$0.5713022055354\times10^{-2}$	$0.5713019138196\times10^{-2}$	$0.5698934401826\times10^{-2}$
30	2	-8	18	$0.9460862321659\times10^{-2}$	$0.9461143436325\times10^{-2}$	$0.9448181052947\times10^{-2}$
30	2	-6	20	$0.2823561066339\times10^{-1}$	$0.2825216233670\times10^{-1}$	$0.2824137621080\times10^{-1}$
30	2	-4	22	$0.1332378414479\times10^{-3}$	$0.8031214644615\times10^{-3}$	$0.7967125472328\times10^{-3}$
30	2	-2	24	$-0.3571464246330\times10^{-2}$	$-0.4067143402955\times10^{-1}$	$-0.4068994646337\times10^{-1}$
30	2	0	26	$0.5687372243357\times10^{0}$	$0.8432070821565\times10^{0}$	$0.8432180754044\times10^{0}$
30	2	2	28	$0.1090101237776\times10^{2}$	$0.1206212720880\times10^{1}$	$0.1202518385562\times10^{1}$
30	2	4	30	$0.1283979004667\times10^{3}$	$-0.7365511398644\times10^{1}$	$-0.7368430242571\times10^{1}$
30	2	6	32	$-0.1078978443250\times10^{4}$	$-0.1504783954024\times10^{2}$	$-0.1596441418996\times10^{2}$
30	2	8	34	$0.1268956457029\times10^{5}$	$0.3976137189384\times10^{2}$	$0.4091452434365\times10^{2}$
30	2	10	36	$0.4311563486128\times10^{5}$	$0.1344069473763\times10^{3}$	$0.1881260025841\times10^{3}$
30	2	12	38	$-0.1462695561734\times10^{6}$	$-0.5309894895613\times10^{3}$	$0.1102086582301\times10^{3}$
30	2	14	40	$-0.9518555070635\times10^{6}$	$-0.2373497125213\times10^{4}$	$-0.8444946464066\times10^{3}$
30	2	16	42	$-0.2990934231992\times10^{7}$	$-0.2828064882188\times10^{4}$	$-0.2478127733697\times10^{4}$
30	2	18	44	$0.6739078334877\times10^{7}$	$-0.1189307052720\times10^{5}$	$-0.1719989761921\times10^{4}$
30	2	20	46	$0.1267869828572\times10^{9}$	$-0.1100545306505\times10^{5}$	$0.7099281584896\times10^{4}$

3.2 计算方法稳定性的判别

为了比较各种方法的优劣, 需要一个判别计算方法稳定性的准则. 实际上, 利用直接计算方法计算得到的Hansen系数, 通过判别这些数据是否满足Hansen系数的递推关系, 就可判别方法的稳定性.

不难验证, 对于小偏心率, 各种方法的计算结果, 均满足递推关系. 但是, 对于大偏心率, 就不一定满足了. 举一个例子, 偏心率函数的递推关系式为[6]:

$$G_{l-2,p-1,q}=\frac{l-2p}{l-2p+q}\sqrt{1-e^2}G_{lpq}+\frac{(l-1)e}{2(l-2p+q)\sqrt{1-e^2}}(G_{l-1,p-1,q-1}-G_{l-1,p,q+1})\,.$$

对于偏心率$e=0.75$, 指标$l=30$、$p=29$和$q=-1$, Wnuk方法和McClain方法1, 即附录(2a)和(5.1a)式程序计算结果, 见表3. 要判别Wnuk方法和McClain方法1的计算结果是否稳定, 只需将计算结果代入上述递推关系式即可. 对于Wnuk方法, 此时$G_{lpq}=0.2056355791128\times10^3$、$G_{l-1,p,q+1}=0.4210025874464\times10^2$、$G_{l-1,p-1,q-1}=0.9079971968072\times10^2$、$G_{l-2,p-1,q}=0.1542231019741\times10^2$; 而$l=30$、$l-2p=-28$、$l-2p+q=-29$、$l-1=29$, 于是递推关系式右边$=94.51164097\neq15.42231020$ (递推关系式左边), 显然这个结果不能认为是稳定的. 对于McClain方法1, 通过类似判别, 相应的计算结果更不稳定.

表 3 稳定性判别数据(双精度计算)

Table 3 The data for stability discrimination (double precision computation)

l	p	q	k	Wnuk's method Eq. (2a) or Eq. (3a)[a]	McClain's first method Eq. (5.1a)[b]
30	29	−1	−29	$0.2056355791128\times10^3$	$-0.2798599055085\times10^9$
29	29	0	−29	$0.4210025874464\times10^2$	$-0.8434735464470\times10^9$
29	28	−2	−29	$0.9079971968072\times10^2$	$-0.2036490638135\times10^9$
28	28	−1	−29	$0.1542231019741\times10^2$	$-0.1645853936500\times10^9$

[a] The summation ranges of the indexes s and t are 0–50 and −50–50, respectively;

[b] The summation range of the index i is 0–70.

进一步分析表明, Wnuk方法的计算结果不稳定是由于求和范围不够, 而McClain方法1不稳定是由于计算机字长不够. 我们扩大Wnuk方法的求和范围, 在McClain方法1中利用4精度计算, 计算结果如表4所示. 由表4可知, 这两种结果可以认为是稳定的. 应该说明, 由于McClain方法1的计算效率很高, 即使采用4精度来计算时间也较短, 可以满足实用要求.

表 4 稳定性判别数据

Table 4 The data for stability discrimination

l	p	q	k	Wnuk's method Eq. (2a) or Eq. (3a)[a]	McClain's first method Eq. (5.1a)[b]
30	29	-1	-29	$0.6535635128884\times10^2$	$0.6539885877329\times10^2$
29	29	0	-29	$0.6202499298121\times10^0$	$0.6252491546172\times10^0$
29	28	-2	-29	$0.6271316802174\times10^2$	$0.6275657198574\times10^2$
28	28	-1	-29	$0.6538245252618\times10^1$	$0.6540499734199\times10^1$

[a] Double precision computation, the summation ranges of the indexes s and t are 0–70 and -70–70, respectively;

[b] Quadruple precision computation, the summation range of the index i is 0–70.

3.3 小结

根据7种Hansen系数及其导数直接计算方法的Fortran程序计算情况, 结合上述分析, 可以对Hansen系数计算, 得出如下初步结论:

(1)对于小偏心率($e < 0.2$)轨道, 各种计算方法均可以满足计算精度的要求;

(2)对于大偏心率轨道, Wnuk方法(Wnuk直接求导方法)和Giacaglia方法计算结果较好;

(3)可以利用递推关系来判别计算结果是否稳定;

(4) Hansen系数计算的主要困难是计算机字长不够.

Hansen系数计算不稳定的情况, 均出现在大偏心率轨道情形, 而小偏心率轨道没有问题. 对于大偏心率轨道, 分析Hansen系数计算丢失有效位数的原因, 主要是由于Hansen系数计算, 均是由级数求和得到, 即$y = \sum x_i$. 由于x_i中含有阶乘和二项式系数, 在偏心率较大时, 其数量级相差很大, 求和时会损失计算精度. 最糟糕的是在求和时数量级大的数正负相消, 余下部分(即为Hansen系数计算结果)是一个小数, 如果这个小数比最大数的末位数值还小, 计算结果就没有有效数字, 不稳定问题就呈现出来.

由于大多数人造卫星采用小偏心率轨道, 使用无奇点根数的摄动计算是必须的. 针对无奇点根数的摄动计算, 我们需要的是Hansen系数核$K_k^{n,m} = e^{-|k-m|}X_k^{n,m}$, 即须从Hansen 系数$X_k^{n,m}$中提取$e^{|k-m|}$因子, 同时Hansen系数核$K_k^{n,m}$本身不存在偏心率$e$为零的小分母问题. Wnuk方法, 即附录(2a)或(3a)式, 不能满足这一要求, 不能计算Hansen系数核及其导数, 因而不适用于无奇点根数的摄动计算. 采用4精度计算的McClain方法1, 即附录(5.1a)式, 可以兼顾大小偏心率的Hansen系数计算, 也许是较好的选择.

4 结论

本文回顾总结了7种Hansen系数及其导数的直接计算方法, 给出了相关方法的直接求导的导数表达式, 比较分析了这些方法的计算效率和计算稳定性. 研究表明: Hansen系数的递推关系可以用来判别计算结果的稳定性. 值得指出的是, Wnuk方法(双精度计算)和McClain方法(4精度计算)是稳定的, 可以用来计算人造卫星轨道摄动. 由于

大多数人造卫星采用小偏心率轨道, 需要计算无奇点摄动, 推荐使用McClain方法1 (4精度计算), 即附录中(5.1a)和(5.1b)式.

参考文献

[1] Wu L D, Wang H B, Ma J Y. Inclination Function in Satellite Dynamics. Beijing: Science Press, 2012

[2] Kaula W M. GeoJI, 1961, 5: 104

[3] Kaula W M. AJ, 1962, 67: 300

[4] Balmino G. Geodetic Satellite Orbits in the Earth′s Gravity Field. Tutorials on Theoretical or Methodological Aspects in Gravimetry, International Gravimetric Bureau, 2005

[5] Wnuk E. AdSpR, 1997, 19: 1735

[6] Giacaglia G E O. CeMec, 1976, 14: 515

[7] McClain W D. A Recursively Formulated First-Order Semianalytic Artificial Satellite Theory Based on the Generalized Method of Averaging. Volume II. The Explicit Development of the First-Order Averaged Equations of Motion for the Nonspherical Gravitational and Nonresonant Third-Body Perturbations. NASA CR-156783, 1978

[8] Proulx R J, McClain W D. JGCD, 1988, 11: 313

[9] Brouwer D, Clemence G M. Methods of Celestial Mechanics. New York: Academic Press, 1961

[10] Harrison J. Fast and Accurate Bessel Function Computation. Proceedings of the 19th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, Portland, June 8-10, 2009: 104-113

Direct Calculation Methods of Hansen Coefficients and Their Derivatives

WU Lian-da[1] ZHANG Ming-jiang[1,2]

(1 Purple Mountain Observatory, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)
(2 Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023)

Abstract Seven direct calculation methods of Hansen coefficients and their derivatives are reviewed. The computational efficiencies of these methods are compared, and their computational stabilities are analyzed. We show that the recursion relations of Hansen coefficients can be used to determine the stabilities of calculation results. Finally, it is pointed out that Wnuk's method (double precision computation) and McClain's methods (quadruple precision computation) are stable, which can be used to calculate orbit perturbations. Because of small orbital eccentricities of most satellites, the perturbation calculations without singularities are required, and McClain's first method (quadruple precision computation) is recommended.

Key words celestial mechanics, perturbation theory: perturbation function and its expansion method, methods: numerical

附录

A.1 Balmino方法

基于Balmino给出的Hansen系数表达式[4], 利用杨辉三角, 我们得到下列Hansen系数的计算表达式:

$$
\begin{aligned}
X_{m+s}^{n,m} = &\left(-\frac{e}{2}\right)^s \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^{2t} \left\{ \sum_{j=0}^{t} \sum_{p=0}^{j} \binom{n+m+1}{j-p} X_p \sum_{q=0}^{s+j} \binom{n-m+1}{s+j-q} X_q \times \right. \\
&\left. \left[\binom{2t-n+s-p-q-2}{t-j} - \binom{2t-n+s-p-q-2}{t-j-1} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{1a}
$$

其中,

$$
X_p = \frac{(m+s)^p}{p!}, X_q = \frac{(m+s)^q}{q!}(-1)^q .
$$

我们将(1a)式中Hansen系数$X_{m+s}^{n,m}$, 直接对轨道偏心率e求导, 得到相应的Hansen系数导数的计算表达式:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_{m+s}^{n,m}}{\mathrm{d}e} = (-1)^s &\sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{t} \sum_{p=0}^{j} \binom{n+m+1}{j-p} X_p \sum_{q=0}^{s+j} \binom{n-m+1}{s+j-q} X_q \times \right. \\
&\left. \left[\binom{2t-n+s-p-q-2}{t-j} - \binom{2t-n+s-p-q-2}{t-j-1} \right] \right\} \times \\
&\frac{2t+s}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^{2t+s-1} .
\end{aligned} \tag{1b}
$$

上述表达式(1a)和(1b)中, s必须恒为正. 如果$s < 0$, 则利用Hansen系数的对称性$X_{m+s}^{n,m} = X_{-m-s}^{n,-m}$进行计算, 即表达式中的$m$和$s$均改变符号.

A.2 Wnuk方法

Wnuk给出下列Hansen系数及其导数的计算表达式[5]:

$$
X_k^{n,m} = (1+\beta^2)^{-(n+1)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} E_{k-t}^{n,m} J_t(ke) , \tag{2a}
$$

$$
\begin{aligned}
2(1-e^2)\frac{\mathrm{d}X_k^{n,m}}{\mathrm{d}e} = &-\frac{2m}{e} X_k^{n,m} - (n+m)eX_k^{n,m} + \frac{2k(1-e^2)^{3/2}}{e} X_k^{n,m} - \\
&(2n+4m)X_k^{n,m-1} - (n+m)eX_k^{n,m-2} ,
\end{aligned} \tag{2b}
$$

其中,

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\,,$$

$$E_{k-t}^{n,m} = \begin{cases} (-\beta)^{k-t-m} \sum\limits_{s=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n-m+1 \\ k-t-m+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m+1 \\ s \end{pmatrix} \beta^{2s}, & (k-t-m \geqslant 0)\,, \\ (-\beta)^{t-k+m} \sum\limits_{s=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+m+1 \\ t-k+m+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-m+1 \\ s \end{pmatrix} \beta^{2s}, & (k-t-m < 0)\,, \end{cases}$$

$J_t(ke)$是关于ke的Bessel函数.

Wnuk建议, 按如下方法计算Bessel函数$J_t(ke)$[5, 9]:

$$\begin{cases} J_0(ke) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^i}{i!i!} \left(\dfrac{ke}{2}\right)^{2i}, & (ke < 20)\,, \\ J_0(ke) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi ke}}\xi \cos\left(ke - \dfrac{\pi}{4} + \eta\right), & (ke \geqslant 20)\,, \\ J_t(ke) = p_t J_{t-1}(ke), & (t > 0)\,, \end{cases}$$

其中,

$$\xi = 1 - \frac{1}{16(ke)^2} + \frac{53}{512(ke)^4},\ \eta = -\frac{1}{8ke} + \frac{25}{384(ke)^3},\ p_t = \frac{1}{2t/(ke) - p_{t+1}}\,.$$

值得指出的是: $J_0(ke)$有许多渐近展开式, 上式中ξ和η的计算表达式引自文献[10], 试算表明, 这样计算$J_0(ke)$的相当精度约为10^{-8}, 已能基本满足计算Hansen系数的要求; p_t的递推计算, 参见文献[9], 从$p_{t+1}=0$开始递推, 取$t=2N$, N为需要计算的$J_t(ke)$的指标t的最大值; 当$ke=0$时, 上式中p_t的计算有0分母, 需要特殊处理.

当$t<0$或$ke<0$时, 需用下式计算Bessel函数[9]:

$$J_{-t}(ke) = J_t(-ke) = (-1)^t J_t(ke)\,.$$

A.3 Wnuk直接求导方法

Hansen系数的计算表达式(2a)[5], 可改写为如下形式:

$$X_k^{n,m} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \mp m+1 \\ |k-t-m|+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \pm m+1 \\ s \end{pmatrix} A(\beta) J_t(ke)\,, \tag{3a}$$

其中, m前的正负号可以根据$k-t-m$是否大于0来决定,

$$A(\beta) = (1+\beta^2)^{-(n+1)}(-\beta)^{|k-t-m|}\beta^{2s}\,.$$

我们将(3a)式中Hansen系数$X_k^{n,m}$, 直接对轨道偏心率e求导, 得到相应的Hansen系数导数的计算表达式:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X_k^{n,m}}{\mathrm{d}e} = \sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n\mp m+1}{|k-t-m|+s}\binom{n\pm m+1}{s} \times \\ \left[\frac{\mathrm{d}A(\beta)}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}e}J_t(ke)+A(\beta)k\frac{\mathrm{d}J_t(ke)}{\mathrm{d}(ke)}\right],\end{aligned} \tag{3b}$$

其中,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=A(\beta)\left[-\dfrac{2\beta(n+1)}{1+\beta^2}+\dfrac{2s+|k-t-m|}{\beta}\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}e}=\dfrac{(1+\beta^2)^2}{2(1-\beta^2)},\\ \dfrac{\mathrm{d}J_t(ke)}{\mathrm{d}(ke)}=\dfrac{1}{2}[J_{t-1}(ke)-J_{t+1}(ke)].\end{cases}$$

A.4 Giacaglia方法

基于Giacaglia给出的Hansen系数$X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}$ (偏心率函数G_{lpq})表达式[6], 利用二项式系数关系, 我们得到下列偏心率函数G_{lpq}的计算表达式:

$$\begin{aligned}G_{lpq} &= X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}\\ &=\sum_{s=0}^{s_1}\sum_{t=0}^{t_1}\binom{2l-2p+s-1}{s}\binom{2p+t-1}{t}A'(\beta)J_{q-s+t}(k'e),\end{aligned} \tag{4a}$$

其中,

$$s_1=\begin{cases}\infty, & (l\neq p),\\ 0, & (l=p),\end{cases}\quad t_1=\begin{cases}\infty, & (p\neq 0),\\ 0, & (p=0),\end{cases}$$
$$A'(\beta)=(1+\beta^2)^l\beta^{s+t},\qquad \beta=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},\qquad k'=l-2p+q.$$

我们将(4a)式中偏心率函数G_{lpq}, 直接对轨道偏心率e求导, 得到相应的偏心率函数导数的计算表达式:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G_{lpq}}{\mathrm{d}e}=\frac{\mathrm{d}X_{l-2p+q}^{-l-1,l-2p}}{\mathrm{d}e}=\sum_{s=0}^{s_1}\sum_{t=0}^{t_1}\binom{2l-2p+s-1}{s}\binom{2p+t-1}{t}\times\\ \left[\frac{\mathrm{d}A'(\beta)}{\mathrm{d}\beta}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}e}J_{q-s+t}(k'e)+A'(\beta)k'\frac{\mathrm{d}J_{q-s+t}(k'e)}{\mathrm{d}(k'e)}\right],\end{aligned} \tag{4b}$$

其中,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A'(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = A'(\beta)\left(\dfrac{2l\beta}{1+\beta^2} + \dfrac{t+s}{\beta}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}e} = \dfrac{(1+\beta^2)^2}{2(1-\beta^2)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}J_{q-s+t}(k'e)}{\mathrm{d}(k'e)} = \dfrac{1}{2}\left[J_{q-s+t-1}(k'e) - J_{q-s+t+1}(k'e)\right]. \end{cases}$$

A.5 两种McClain方法

基于McClain给出的Hansen系数$X_t^{n,s}$的表达式[7], Ploulx和McClain进一步利用广义Laguerre多项式$L_m^{(j)}(x)$, 得到下列Hansen系数的计算表达式[8]:

$$X_t^{n,s} = (1-\beta^2)^{2n+3}(1+\beta^2)^{-(n+1)}(-\beta)^{|t-s|}\sum_{i=0}^{\infty} L_{i+\alpha}^{(n-t+1)}(\mu)L_{i+b}^{(n+t+1)}(-\mu)\beta^{2i}, \quad (5.1^*)$$

$$X_t^{n,s} = (1+\beta^2)^{-(n+1)}(-\beta)^{|t-s|}\sum_{i=0}^{\infty} L_{i+\alpha}^{(n-s-i-\alpha+1)}(\nu)L_{i+b}^{(n+s-i-b+1)}(-\nu)\beta^{2i}, \quad (5.2^*)$$

其中,

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}, \qquad \mu = \frac{t(1-\beta^2)}{1+\beta^2} = t\sqrt{1-e^2}, \qquad \nu = t(1+\beta^2)^{-1} = \frac{te}{2\beta},$$
$$\alpha = \frac{|t-s|+t-s}{2}, \qquad b = \frac{|t-s|-(t-s)}{2}.$$

(5.1*)和(5.2*)式中, 涉及到的广义Laguerre多项式$L_m^{(j)}(x)$的定义为[8]:

$$L_m^{(j)}(x) = \sum_{\kappa=0}^{m}(-1)^{\kappa}\binom{m+j}{m-\kappa}\frac{x^{\kappa}}{\kappa!}.$$

广义Laguerre多项式$L_m^{(j)}(x)$有下列递推关系:

$$\begin{cases} (m+1)L_{m+1}^{(j)}(x) = (2m+j+1-x)L_m^{(j)}(x) - (m+j)L_{m-1}^{(j)}(x), \\ L_0^{(j)}(x) = 1, \qquad L_1^{(j)}(x) = j+1-x. \end{cases}$$

(1) McClain方法1

我们将(5.1*)式改写为下列形式, 并将其对轨道偏心率e直接求导, 有:

$$X_t^{n,s} = \tilde{A}\tilde{K}\left(-\frac{e}{2}\right)^{|t-s|}, \quad (5.1a)$$

$$\frac{\mathrm{d}X_t^{n,s}}{\mathrm{d}e} = \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{A}}{\mathrm{d}\beta^2}\tilde{K} + \tilde{A}\frac{\mathrm{d}\tilde{K}}{\mathrm{d}\beta^2}\right)\left(-\frac{e}{2}\right)^{|t-s|}\frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}e} + \tilde{A}\tilde{K}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|t-s|}|t-s|e^{|t-s|-1}, \quad (5.1b)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{A} = (1-\beta^2)^{2n+3}(1+\beta^2)^{-(n+1)+|t-s|}, \\ \tilde{K} = \sum_{i=0}^{\infty} L_{i+\alpha}^{(n-t+1)}(\mu) L_{i+b}^{(n+t+1)}(-\mu)\beta^{2i}, \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{A}}{\mathrm{d}\beta^2} = \tilde{A}\left[\frac{-(2n+3)}{1-\beta^2} + \frac{-(n+1)+|t-s|}{1+\beta^2}\right], \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{K}}{\mathrm{d}\beta^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}LL}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta^2}\beta^{2i} + iL_{i+\alpha}^{(n-t+1)}(\mu)L_{i+b}^{(n+t+1)}(-\mu)\beta^{2i-2}\right], \\ \frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}e} = \frac{e(1+\beta^2)^3}{2(1-\beta^2)}, \\ \frac{\mathrm{d}LL}{\mathrm{d}\mu} \equiv \frac{d\left[L_{i+\alpha}^{(n-t+1)}(\mu)L_{i+b}^{(n+t+1)}(-\mu)\right]}{\mathrm{d}\mu} \\ \qquad = L_{i+\alpha}^{(n-t+1)}(\mu)L_{i+b-1}^{(n+t+2)}(-\mu) - L_{i+\alpha-1}^{(n-t+2)}(\mu)L_{i+b}^{(n+t+1)}(-\mu), \\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\beta^2} = -2t(1+\beta^2)^{-2}. \end{cases}$$

(2) McClain方法2

我们将(5.2*)式改写为下列形式, 并将其对轨道偏心率e直接求导, 有:

$$X_t^{n,s} = \tilde{A}'\tilde{K}'\left(-\frac{e}{2}\right)^{|t-s|}, \tag{5.2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_t^{n,s}}{\mathrm{d}e} = \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{A}'}{\mathrm{d}\beta^2}\tilde{K}' + \tilde{A}'\frac{\mathrm{d}\tilde{K}'}{\mathrm{d}\beta^2}\right)\left(-\frac{e}{2}\right)^{|t-s|}\frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}e} + \tilde{A}'\tilde{K}'\left(-\frac{1}{2}\right)^{|t-s|}|t-s|e^{|t-s|-1}, \tag{5.2b}$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{A}' = (1+\beta^2)^{-(n+1)+|t-s|}, \\ \tilde{K}' = \sum_{i=0}^{\infty} L_{i+\alpha}^{(n-s-i-\alpha+1)}(\nu)L_{i+b}^{(n+s-i-b+1)}(-\nu)\beta^{2i}, \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{A}'}{\mathrm{d}\beta^2} = \tilde{A}'\left[\frac{-(n+1)+|t-s|}{1+\beta^2}\right], \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{K}'}{\mathrm{d}\beta^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}L'L'}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\beta^2}\beta^{2i} + iL_{i+\alpha}^{(n-s-i-\alpha+1)}(\nu)L_{i+b}^{(n+s-i-b+1)}(-\nu)\beta^{2i-2}\right], \\ \frac{\mathrm{d}\beta^2}{\mathrm{d}e} = \frac{e(1+\beta^2)^3}{2(1-\beta^2)}, \\ \frac{\mathrm{d}L'L'}{\mathrm{d}\nu} \equiv \frac{\mathrm{d}\left[L_{i+\alpha}^{(n-s-i-\alpha+1)}(\nu)L_{i+b}^{(n+s-i-b+1)}(-\nu)\right]}{\mathrm{d}\nu} \\ \qquad = L_{i+\alpha}^{(n-s-i-\alpha+1)}(\nu)L_{i+b-1}^{(n+s-i-b+2)}(-\nu) - L_{i+\alpha-1}^{(n-s-i-\alpha+2)}(\nu)L_{i+b}^{(n+s-i-b+1)}(-\nu), \\ \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\beta^2} = -\frac{t}{(1+\beta^2)^2}. \end{cases}$$

A.6定积分方法

利用轨道偏近点角E作为积分变量, Hansen系数及其导数的定积分计算表达式为:

$$X_k^{n,m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\cos(mf-kM)\mathrm{d}E\,, \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X_k^{n,m}}{\mathrm{d}e}=&-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\left[n\frac{a}{r}\cos f\cos(mf-kM)+\right.\\&\left.\frac{m}{1-e^2}(2+e\cos f)\sin f\sin(mf-kM)\right]\mathrm{d}E\,.\end{aligned} \tag{6b}$$

其中, r为目标向径, a、e、M和f分别为轨道半长径、偏心率、平近点角和真近点角.