

含辐射和扁率的圆型限制性三体问题的 轨道稳定性研究*

石绍伍 马大柱[†]

(湖北民族大学信息工程学院 恩施 445000)

摘要 基于最小二乘法原理的速度因子方法是保流形结构算法中效率最高、稳定性最好、应用最广的方法. 利用速度因子方法讨论了主星为辐射源, 伴星为扁球的平面圆型限制性三体问题的稳定性问题. 数值研究表明: (1)仅考虑扁状摄动项时, 系统混沌运动的轨道数量会增多; (2)仅考虑辐射项时, 系统有序运动的轨道数量会增多; (3)同时存在辐射和扁状摄动时, 辐射占主导作用, 系统有序运动的几率会增加.

关键词 天体力学, Lyapunov指数, 混沌, 圆型限制性三体问题

中图分类号: P136; **文献标识码:** A

1 引言

圆型限制性三体问题描述的是在三体中把第3体的质量看成无限小, 不考虑第3体对主星和伴星的引力作用, 伴星在主星的作用下近似作圆周运动. 该系统不可积, 但存在一个雅克比积分常数和5个平动点解, 具有广泛的天文应用背景. 如在研究月球运动时, 不考虑太阳轨道偏心率、太阳视差和月球轨道倾角, 这就是一个平面圆型限制性三体问题. 然而, 大多数行星由于其赤道半径和极半径并不相等, 应作为扁球处理. 另一方面, 太阳作为辐射源产生的辐射作用不能忽略. 因此, 在经典模型基础上加入主星的辐射作用以及伴星的扁状摄动引力势对第3体的影响更接近实际太阳系模型. 由于在旋转坐标系下, 第3体除受到引力作用之外, 还受到旋转坐标系产生的非惯性力的影响^[1]. 因此, 含辐射和扁球的圆型限制性三体问题的哈密顿量实际上可分解为动能对应的Euler流、由坐标旋转导致的正交旋转和势能对应的Euler流. 为减少数值误差对长期积分的影响, 数值积分工具宜采用保辛结构算法和保流形结构算法.

辛算法可用于研究哈密顿系统长期演化问题. 辛算法有显式和隐式之分, 显式方法常用于处理可分离式哈密顿系统, 但在右函数形式复杂时其计算效率较低. 隐式方

2018-12-03收到原稿, 2019-04-03收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11703005、11263003、11533004、11603072)和湖北民族大学博士启动基金项目(MY2018B015)资助

[†]mdzhbmy@126.com

法常需与梯形法、龙格库塔法、低阶显辛法结合使用, 计算过程较为繁琐, 一般不宜采用. 辛算法还可以分为力梯度辛算法和非力梯度辛算法. Ruth^[2]、Wisdom等^[3-4]、Forest和Ruth^[5]以及Yoshida^[6]等作者构造了多种非力梯度辛算法. 力梯度辛算法主要的代表作者是Chin^[7]. 国内研究人员也设计了一种含3阶导数项的4阶力梯度辛算法. 该文指出力梯度辛算法在计算限制性三体问题时比非力梯度算法效果要好, 且4阶力梯度辛算法明显优于非力梯度辛算法和其他常用的力梯度辛算法^[8]. 显然, 上述结论可以推广到含辐射以及扁球的圆型限制性三体问题.

基于最小二乘法原理的流形改正方法利用标度因子将每一步数值积分结果强迫拉回到初始积分超曲面上, 有效减少了数值积分时局部截断误差的积累和人工耗散. 此类方法无需对哈密顿量进行分解, 操作简单效率高, 已在相对论天体力学、太阳系动力学、量子力学和宇宙学中^[9]得到广泛应用. 近年来, 研究人员相继发展了多种流形改正方法^[10-18], 如单因子法^[10]、双因子法^[11]、速度因子方法^[12]等等. 然而将大多数流形改正方法直接应用到非开普勒问题却存在一些困难, 原因在于大多数方法均要求严格或近似地满足开普勒能量、拉普拉斯积分、角动量关系. 但是, 只要某系统存在任意一个守恒量, 仍然能够使用速度因子方法. 文献^[19-27]表明速度因子方法在摄动开普勒问题、Hénon-Heiles系统、致密双星问题、标量场模型等问题中均可以改进低阶算法在精度和稳定性方面的不足, 同时在CPU占用率方面也远远低于高阶算法. 简言之, 速度因子方法具有操作简单、耗时少、应用范围广的特点. 对于含辐射和扁球的圆型限制性三体问题, 借助积分不变关系^[28], 也可以改正每一体轨道根数的精度.

辛算法和流形改正方法均可以长期保持系统的能量积分, 目前无法从理论上区分(如代数精度或泰勒展开式)哪种方式占优. 若在相同代数精度下, 基于4阶龙格库塔法的速度因子算法在数值精度、稳定性和计算效率方面明显优于4阶力梯度辛算法. 因此, 本文利用速度因子方法讨论主星为辐射源, 伴星为扁球的平面圆型限制性三体问题的动力学问题.

2 物理模型

与经典平面圆型限制性三体问题一样, 假定第3体的质量无限小, 第3体对两主天体的运动没有任何影响. 约定两主天体的总质量为1, 伴星的质量为 $m_2 = \mu$, 则主星的质量为 $m_1 = 1 - \mu$. 旋转坐标系中坐标原点选为两主天体的质心, x 轴为两主天体的连线. 如引言所述, 第3体受到两主天体的引力作用、主星的辐射和伴星的扁状摄动影响, 其运动方程^[1]为:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \quad (1)$$

其中,

$$\Omega = \frac{n^2}{2}[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{q(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu A_2}{2r_2^3} - \frac{3\mu A_2 z}{2r_2^5}. \quad (2)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

此处 $q \in [0, 1]$ 、 $A_2 \in [0, 0.2]$ 、 n 、 Ω 、 r_1 和 r_2 分别为主星的辐射因子、伴星的扁率、平运动角频率、等效势、第3体到主星的距离和第3体到伴星的距离. $q = 1$ 且 $A_2 = 0$ 时即

为经典平面圆形限制型三体问题. 此时系统存在一个雅克比积分常数:

$$C_j = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4)$$

为讨论方便, 本文仅限于2维情况(令 $z = 0$). 由于 $\Omega(x, y) = \Omega(x, \pm y)$, 势能曲线关于 x 轴对称. 平动点位于零速度曲线上($\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0$), 即:

$$n^2x - \frac{q(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} - \frac{3\mu A_2(x+1-\mu)}{2r_2^5} = 0, \quad (5)$$

$$y \left[n^2 - \frac{q(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} - \frac{3\mu A_2}{2r_2^5} \right] = 0. \quad (6)$$

系统存在3个共线平动点 L_1 、 L_2 和 L_3 , 两个三角平动点 L_4 和 L_5 . 平动点的稳定性与经典情况类似, 此处不再讨论. 第3体的运动也可以用哈密顿函数表示:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x + xp_y - U(x, y). \quad (7)$$

其中 p_x 和 p_y 分别表示第3体在 x 和 y 方向动量的分量. 力函数的形式为:

$$U(x, y) = \frac{q(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu A_2}{2r_2^3}. \quad (8)$$

哈密顿式可以分解为动能 T 和势能 V 两部分:

$$T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x + xp_y, \quad V = -U(x, y). \quad (9)$$

因动能中含有旋转坐标系为非惯性系而对第3体附加的影响 $yp_x + xp_y$, 导致动能不是动量的严格2次型. 但若将位置算子变为位置与动量混合型算子, 则可以使用力梯度辛算法求解^[29].

3 数值方法

3.1 流形改正原理

对于含一个运动积分 $\phi(\mathbf{x}) = C$ 的 n' 维微分动力系统, 其中 \mathbf{x} 是坐标和动量的函数($\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$), C 、 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 分别代表常数、动量和坐标. 理论上应满足下述关系,

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - C = 0. \quad (10)$$

但数值计算时很难满足 $\epsilon(\mathbf{x}) = 0$. 按照某数值算法得到 t 时刻数值解为 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$, 标准值和数值解的差记为 $\Delta\epsilon$, 则有

$$\Delta\epsilon = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\boldsymbol{\eta}). \quad (11)$$

定义矩阵 \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial p'_1}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial\phi}{\partial p'_{n'}}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial q'_1}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial\phi}{\partial q'_{n'}} \right). \quad (12)$$

根据最小二乘法原理得到改正矢量 $\Delta\eta$ 为

$$\Delta\eta = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}^T(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}^T)^{-1}\Delta\epsilon. \quad (13)$$

上标T代表转置, \mathbf{W} 是任意给定的权重矩阵. $\Delta\eta$ 也可以写成另外一种形式

$$\Delta\eta = -\Delta\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \left| \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right|^{-2}. \quad (14)$$

将改正矢量 $\Delta\eta$ 作用在低阶算法得到的数值解 η 后, 可得新的改正解 ξ 为

$$\xi = \eta + \Delta\eta. \quad (15)$$

将改正解 ξ 作为下一步积分的初值, 如此循环. 理论上, 改正后值 ξ 的精度为改正前 η 的平方倍, 即:

$$\epsilon(\xi) \sim \epsilon^2(\eta). \quad (16)$$

该方法是Nacozy在1971年提出的^[30].

3.2 速度因子方法

流形改正原理提供了一种处理数值解误差的近似方法, 但由于坐标和速度的量纲不同, (15)式的物理意义并不明确. 但如果只考虑对动量(速度)的改正, 就可以解决量纲问题. 并且Wu等^[13]已严格证明只改正速度与同时改正速度和坐标是等效的. 速度因子方法^[12]正是在此基础之上提出来的, 该方法定义一个拉格朗日乘子 γ 将数值积分时偏离的部分拉回到初始流形. γ 的表达式为:

$$\epsilon(\gamma\mathbf{p}', \mathbf{q}) = \phi(\gamma\mathbf{p}', \mathbf{q}) - C = 0. \quad (17)$$

注意 γ 可取正根或负根, 大样本数值模拟表明负根容易出错, 导致不能长期积分, 故推荐采用正根. 该方法将作为基本数值工具用于研究本文模型的动力学问题.

4 轨道稳定性研究

速度因子方法在每一步积分后将偏离值以最近的距离拉回到积分初值附近, 这样可以严格保证积分常数始终在初值附近波动, 从而保证数值积分精度. 模型中的速度因子为: $\gamma = \sqrt{\frac{2\Omega - C_1}{x^2 + y^2}}$, 伴星的质量为 $\mu = 0.001$ (参照木星与太阳的质量比). 一般而言, 主星的辐射和引力作用对行星或其他小天体的运动占主导^[1], 伴星的扁球摄动影响较小. 以太阳-木星-小行星系统为例, 可取辐射因子 $q = 0.8$, 扁率 $A_2 = 0.005$. 本文主要讨论辐射因子和扁率的存在对轨道稳定性的影响.

4.1 单条轨道稳定性研究

4.1.1 Poincaré截面

Poincaré截面只适用于研究不超过4维的保守系统, 可以直观反映系统的动力学性质. 严格周期运动在截面上只出现一个点; 拟周期运动会得到一些封闭曲线; 而混沌

运动则出现一些呈随机分布的点. 首先取一条轨道(轨道1): $C_j = 3.06$, $x_0 = 0.29$. 若不考虑太阳辐射和扁状摄动, 该轨道为拟周期轨道^[29]. 计算结果见图1 (a), 截面上出现了由5条封闭曲线构成的岛链结构. 如果只加入扁状摄动, 令 $q = 1$, A_2 在0-0.2每间隔0.001变化, 我们发现只要满足条件 $0 < A_2 < 0.1$, 轨道总是处于混沌状态. 图1 (b)是其中选取的一个样本, 此时 $q = 1$, $A_2 = 0.009$. 图中出现了许多杂乱无章的点, 原本有序的轨道变成混沌轨道. 当 $A_2 \geq 0.1$ 时, 扁状摄动太大使得轨道逃逸. 如果只考虑辐射因子的影响, 保持 $A_2 = 0$ 不变, 令 q 在区间 $[0, 1]$ 内每间隔0.01缓慢变化. 模拟发现当 $q \geq 0.48$ 时, 所有轨道均有序. 图1 (c)所示轨道为 $q = 0.9$, 该轨道是拟周期运动轨道. 当 $q < 0.48$ 时, 辐射太强使得轨道逃逸. 同时具有辐射和扁状摄动时, 所有轨道运动均有序(要求 $q \geq 0.48$, $A_2 < 0.1$). 图1 (d)给出的 $q = 0.8$, $A_2 = 0.005$ 即为这种情况. 再考虑另外一条轨道(轨道2): $C_j = 3.06$, $x_0 = 0.48$. 在无辐射因子和扁率的情况下该轨道为混沌轨道, 截面上留下1000个杂乱无章的点, 如图2 (a)所示. 在无辐射($q = 1$)但有扁率的情况下, 当 $0 < A_2 < 0.1$ 时, 轨道混沌. 图2 (b)给出的 $A_2 = 0.009$ 就是其中一例, 截面上分布着大量杂乱无规则的点, 轨道处于混沌运动. 当 $A_2 \geq 0.1$ 时, 轨道逃逸. 有辐射无扁率($A_2 = 0$)时, 当 $q \geq 0.68$ 时, 轨道有序. 当 $q < 0.68$ 时, 轨道逃逸. 与图1的拟周期轨道相比, 图2中较小的辐射作用就可以使得混沌轨道逃逸. 图2 (c)给出的是 $q = 0.9$, $A_2 = 0$ 的结果. 该结果与同时含有辐射和扁率的结果(前提是 $q \geq 0.68$, $0 < A_2 < 0.1$)相似, 均为拟周期轨道, 见图2 (d). 上述数值模拟结果表明辐射和扁状摄动的存在可以使得系统单条轨道的稳定性发生改变. 具体表现在以下几个方面: (1)只有扁状摄动但不至于使得轨道逃逸时, 轨道的有序运动可变为混沌; (2)只有辐射作用但不至于使得轨道逃逸时, 有序轨道仍然有序, 混沌运动也变得有序; (3)同时存在辐射因子和扁状摄动时, 在保持系统现有结构的情况下, 混沌轨道变为有序轨道.

4.1.2 Lyapunov指数

为验证上述结果, 我们计算另外一个混沌指标Lyapunov指数. Lyapunov指数通过衡量两邻近轨道随时间平均分离比来区分周期(拟周期)运动和混沌运动, 对保守系统和耗散系统均适用, 而且对系统的维数不作限制. 计算方法主要有变分法^[20-22] (同时积分变分方程和运动方程)和两粒子法^[23-24] (积分运动方程两次), 后者效率稍高, 本文采用两粒子法. 一个 n' 维动力系统包含 n' 个Lyapunov指数, 为计算方便, 一般只计算最大Lyapunov指数

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\xi'(t)\|}{\|\xi'(0)\|}. \quad (18)$$

$\xi'(0)$ 和 $\xi'(t)$ 分别为两邻近轨道初始和时刻 t 时的距离. 变分法中, 两邻近轨道的初始变分距离为单位1. 而两粒子法情况下初始时刻的距离必须适当选择^[23], 一般在双精度情况下取为 10^{-8} . 对有界轨道, 若系统混沌, 则 $\lambda > 0$; 若系统有序, 则 $\lambda = 0$. 用数值方法计算Lyapunov指数时, 理论上时间应为无穷, 本文最终的积分时间为 10^5 . 仍然考虑两条不同的轨道, 选取步长 $\tau = 0.01$, 轨道初值和相关参数与Poincaré截面中保持一致. 每一步积分后, 均实施一次重整化. 两条轨道的Lyapunov指数如图3所示, 图中我们将Lyapunov指数和积分时间都取了对数. 图3 (a)给出轨道1的运动情况. 容易看出 $q = 1$, $A_2 = 0.009$ 与其他3种情况完全不同(该轨道是混沌轨道). 无辐射和扁状摄动情

况下, 该轨道为拟周期轨道; 无辐射但扁状摄动不太强时, 轨道1混沌; 无扁状摄动但辐射不太强时, 轨道1有序; 既有辐射又有扁状摄动时, 轨道1有序. 该结论与图1的结果一致. 图3 (b)给出的是原本为混沌的轨道2加入辐射因子和扁状摄动后的结果. 无辐射但扁状摄动不太强时, 轨道2混沌; 无扁状摄动但辐射不太强时, 轨道2有序; 既有辐射又有扁状摄动时, 轨道2有序. 该结论与图2的结果一致.

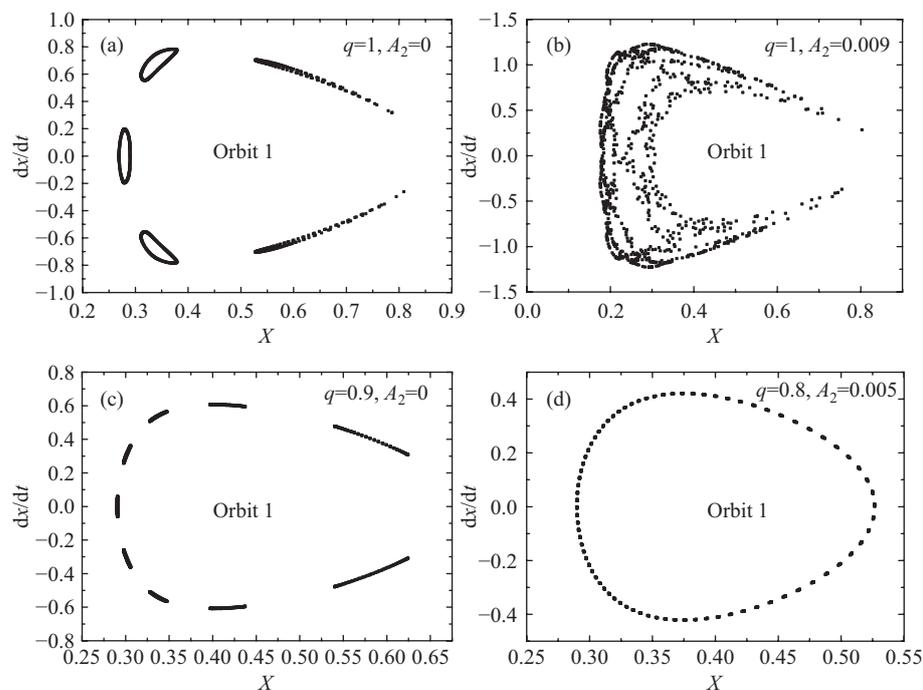


图 1 轨道1的Poincaré截面图. (a) $q = 1, A_2 = 0$; (b) $q = 1, A_2 = 0.009$; (c) $q = 0.9, A_2 = 0$; (d) $q = 0.8, A_2 = 0.005$

Fig. 1 Poincaré sections for the orbit 1. (a) $q = 1, A_2 = 0$; (b) $q = 1, A_2 = 0.009$; (c) $q = 0.9, A_2 = 0$; (d) $q = 0.8, A_2 = 0.005$

计算Lyapunov指数时要求时间尽量取得足够大, 这样才能得到一个收敛于稳定数值的值, 如果在给定的时间段内不采用重整化、不对时间作平均化处理, 可以得到另外一个随时间变化的指标^[23]—快速Lyapunov指数(FLI). 快速Lyapunov指数也是一种方便快捷的区分有序和混沌的指标. 有界轨道中, 切向量长度随时间演化的速度是完全不同的. 若两邻近轨道呈指数式的偏离, 则该轨道是混沌的; 若呈代数式变大, 则是有序轨道. 与Lyapunov指数相比, 快速Lyapunov指数只需要在较短的积分时间内就可以区分有序和混沌轨道. 该模型用快速Lyapunov指数计算的结果与前面给出的Lyapunov指数结果非常相似, 此处不再重复列出.

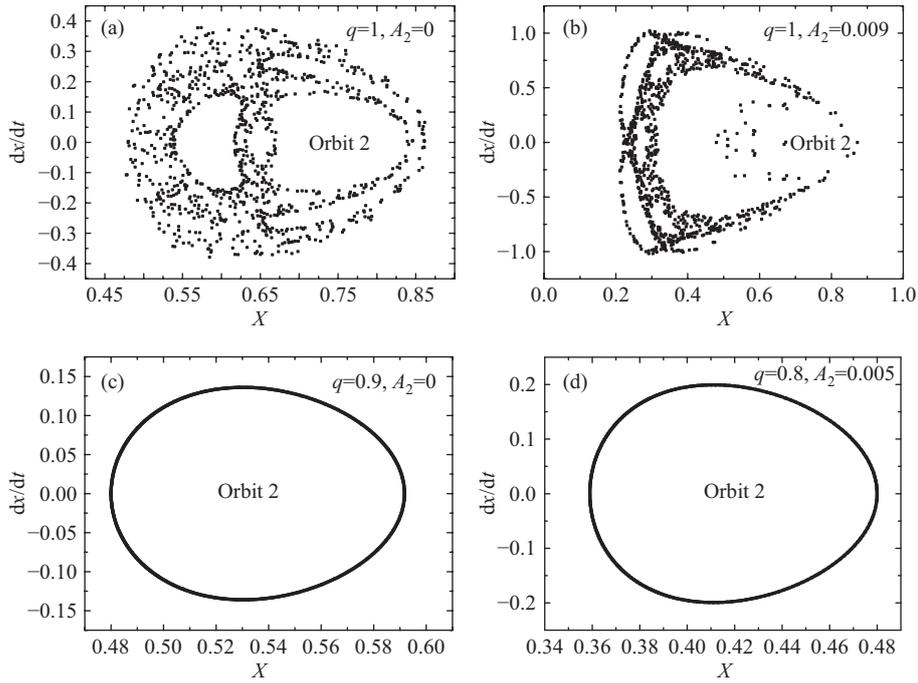


图2 轨道2的Poincaré截面图. (a) $q=1, A_2=0$; (b) $q=1, A_2=0.009$; (c) $q=0.9, A_2=0$; (d) $q=0.8, A_2=0.005$

Fig. 2 Poincaré sections for the orbit 2. (a) $q=1, A_2=0$; (b) $q=1, A_2=0.009$; (c) $q=0.9, A_2=0$; (d) $q=0.8, A_2=0.005$

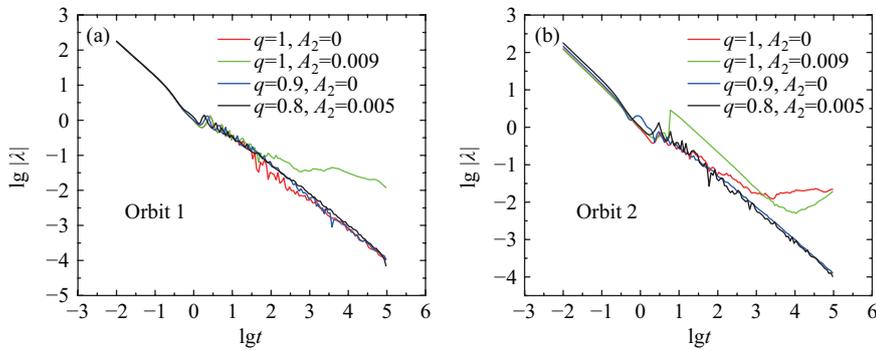


图3 两条轨道的Lyapunov指数(λ)图. (a)轨道1, (b)轨道2

Fig. 3 Lyapunov exponents λ for the two orbits. (a) The orbit 1; (b) The orbit 2

4.2 多条轨道稳定性研究

以上只考虑了两条特殊轨道的长期演化情况, 此处进行多样本数值模拟. 考虑到实际情况下伴星的扁率都很小, 大范围讨论没有必要, 令伴星的扁状摄动 $A_2 = 0.009$. 关于辐射因子, 因其与第3体的面质比有关, 取值可以在较大范围内变化, 是一个可以调节的物理量, 所以我们着重讨论辐射因子对轨道稳定性的影响. 首先考虑一组初值条件: $C_j = 3.06, x_0 = 0.29, y_0$ 在 $0-0.51$ 每间隔 0.01 变化, 总共产生了 52 条轨道. 时间

步长和相关参数与前面计算过程保持一致. 图4分别给出了52条轨道的Lyapunov指数和快速Lyapunov指标随 y_0 的演化. 需要强调的是, 图中已经剔除了逃逸的轨道. 从图4(a)–(b)中明显可以看出 $q = 1, A_2 = 0.009$ 的模拟结果与无辐射无扁率的结果多数情况下保持一致, 但也不完全一致. 扁状摄动的存在使得部分轨道从有序变为混沌. 辐射单独存在与辐射和扁状摄动同时存在的结果基本一致. 在经典平面圆形限制性三体问题中的混沌轨道如果只考虑辐射或者辐射与扁率同时考虑时则变成了拟周期轨道, 这说明辐射和弱扁率项的存在可以增加小天体有序运动的机会.

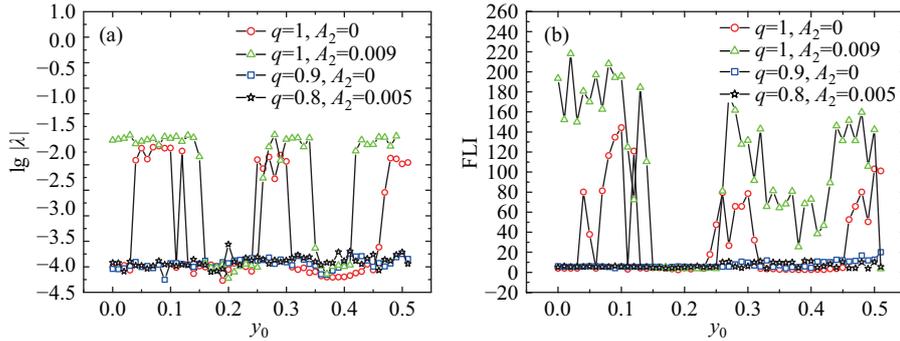


图 4 大样本轨道的Lyapunov指数 λ (a)和快速Lyapunov指数FLI (b)

Fig. 4 Lyapunov exponents λ (a) and fast Lyapunov exponents FLI (b) for the large samples of orbits

除此之外, 我们再讨论另外一组初始条件: $C_j = 3.06, y_0 = 0, x_0$ 在0–1变化, 结果见表1所示. (1)当 $x_0 \leq 0.04$ 时, 第3体离主星太近, 无论有无辐射和扁率作用, 所有轨道均逃逸. (2)当 $x_0 = 0.05$ 时, 原轨道为混沌轨道, 辐射的作用可以使轨道逃逸($0 \leq q < 0.1$), 也可以使轨道处于混沌($0.1 \leq q \leq 1$), 但只要辐射因子项存在, 这些轨道都不稳定. 然而扁率的存在对轨道的稳定性影响却不大. (3)当 $0.05 \leq x_0 \leq 0.49$ 时, 辐射因子对轨道稳定性的改变比较大. 无论初始轨道是有序还是混沌轨道, 较小的辐射因子值都可以使得轨道在短时间内逃逸或瓦解. 随着辐射因子的逐渐增加, 短期内没有逃逸的轨道在较长的积分时间内都会处于混沌状态. 当辐射因子取值达到一定程度时, 原本处于混沌状态的轨道变得有序. 需要指出的是, 当 $x_0 = 0.2$ 和 $x_0 = 0.4$ 时, 辐射因子项可以让原本有序的轨道逃逸或混沌, 也可以继续保持有序状态. 其变化规律与上述其他轨道相似, 辐射因子值越大, 轨道有序运动的机会越多. 扁率对上述轨道的影响不大, 但也有少量轨道除外, 比如第3体非常靠近主天体但不至于使得轨道逃逸时($x_0 \leq 0.1$), 扁率可以使得混沌轨道变为有序. 太阳系内很难找到与以上区域对应的样本(实际天体或人造天体), 所以上述结论只存在理论上的参考价值. (4)当 $x_0 \geq 0.5$ 时, 辐射因子对轨道稳定性的影响与(1)、(2)和(3)不一样. 辐射因子的作用使轨道要么逃逸要么有序. 第3体与主星的距离越远, 逃逸区间的取值越大, 有序运动要求辐射因子的取值也越大. 扁率基本上没什么影响, 仅在 $x_0 = 0.6$ 附近的区域, 可以让部分有序轨道变为混沌轨道. (5)当 $x_0 \geq 0.86$ 时, 与(1)情况一样, 辐射和扁率存在与否都不会产生影响, 因为该区域不存在稳定轨道. 从以上多种情况来看, 扁率对轨道的稳定性影响是比较小的, 这点与辐射因子完全不同. 因为辐射因子可以使初始轨道逃逸, 也可以使之保持长期稳定有序.

表 1 辐射因子 q 和扁率 A_2 对轨道稳定的影响
 Table 1 Effects of q and A_2 on the stability of the orbits

position	$q = 1, A_2 = 0$	$q \neq 1, A_2 = 0$			$q = 1, A_2 = 0.009$
	character	escape region	chaos region	order region	character
$x_0 \leq 0.04$	escape	$0 \leq q \leq 1.00$			escape
$x_0 = 0.05$	chaos	$0 \leq q < 0.10$	$0.10 \leq q \leq 1.00$		chaos
$x_0 = 0.1$	chaos	$0 \leq q < 0.18$	$0.18 \leq q < 0.25$	$0.25 \leq q \leq 1$	order
$x_0 = 0.2$	order	$0 \leq q < 0.32$	$0.32 \leq q < 0.37$	$0.37 \leq q \leq 1$	order
$x_0 = 0.3$	chaos	$0 \leq q < 0.45$	$0.45 \leq q < 0.49$	$0.49 \leq q \leq 1$	chaos
$x_0 = 0.4$	order	$0 \leq q < 0.58$	$0.58 \leq q < 0.61$	$0.61 \leq q \leq 1$	order
$x_0 = 0.5$	chaos	$0 \leq q < 0.70$		$0.70 \leq q \leq 1$	chaos
$x_0 = 0.6$	order	$0 \leq q < 0.81$		$0.81 \leq q \leq 1$	chaos
$x_0 = 0.7$	order	$0 \leq q < 0.90$		$0.90 \leq q \leq 1$	order
$x_0 = 0.8$	order	$0 \leq q < 0.97$		$0.97 \leq q \leq 1$	order
$x_0 \geq 0.86$	escape	$0 \leq q \leq 1.00$			escape

对应实际的太阳-木星-小行星系统, 文献[1]中取辐射因子 $q = 0.8$, 扁率 $A_2 = 0.005$. 令 $C_j = 3.06$, 结果如图5所示. 在无辐射和扁率时, 小行星的运动多数表现出混沌现象 ($x > 0.5$). 只考虑扁率时, 混沌区域的范围有所增加, 积分的时间越长, 混沌的区域还会扩大, 逃逸轨道的数量也越来越多. 只有辐射作用时, 不存在混沌区域, 所有轨道都是周期轨道或拟周期轨道. 但如果辐射因子 $q < 0.8$, 逃逸轨道的数量会逐渐增多. 扁率和辐射同时作用与辐射项单独存在的结果一致, 虽然理论上扁率也有很多可能的取值, 但实际情况下扁率都很小.

总之, 无论是单条轨道演化还是多条轨道的数值实验结果均表明: 在轨道不至于逃逸的情况下, 辐射和扁率的共同作用使得相空间中有序运动的几率增加了, 小天体的运动可以长期处于稳定状态. 但需要强调的是, 引力作用和主星的辐射作用才是主要因素, 伴星的扁球摄动相对主星的辐射和引力作用来说是小量, 基本上可以忽略不计. 总的来说, 形状摄动和辐射的存在的确可以改变轨道的运动状态, 增加部分轨道有序运动的几率. 这点在计算太阳系行星历表时若有所体现的话, 则太阳系各天体稳定的时标可能会更长.

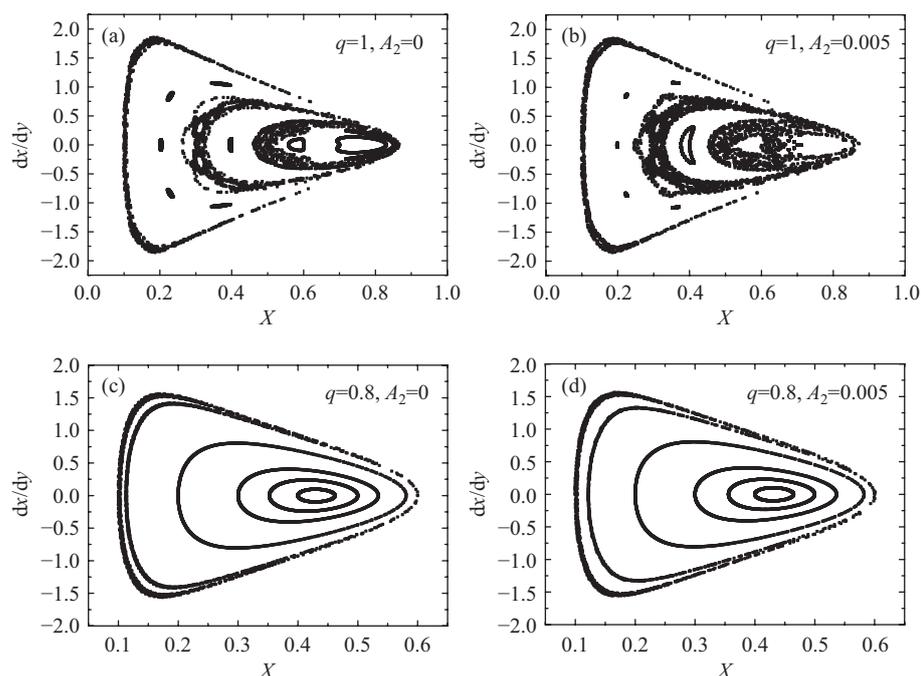


图 5 太阳-木星-小行星系统的Poincaré截面图. (a) $q = 1, A_2 = 0$; (b) $q = 1, A_2 = 0.005$; (c) $q = 0.8, A_2 = 0$; (d) $q = 0.8, A_2 = 0.005$

Fig. 5 Poincaré sections for the Sun-Jupiter-Asteroid system. (a) $q = 1, A_2 = 0$; (b) $q = 1, A_2 = 0.005$; (c) $q = 0.8, A_2 = 0$; (d) $q = 0.8, A_2 = 0.005$

5 结论

本文在经典平面圆型限制性三体问题中加入了恒星辐射和伴星的扁球摄动因素, 使该模型更具有实际物理意义. 本文以保流形的速度因子方法为基本工具, 研究了该模型的动力学问题. 数值模拟结果表明单纯的形状摄动或单纯的辐射作用都会改变轨道的运动状态, 使得有序运动变得无序甚至逃逸, 也可以使得混沌运动变得有序. 本文的数值研究表明: 当小天体的运动没有受到强烈的辐射作用或扁状摄动时, 特别是辐射因子的取值不能低于一定的限度, 一般情况下小天体的运动不会逃逸到无穷远处. 此时辐射和扁率的作用可以增加系统的可积区域, 增加小天体有序运动的机会. 对于实际的太阳-木星-小天体系统, 数值模拟证实了上述理论结果. 因此在计算太阳系行星历表时, 建议考虑太阳辐射的影响.

参考文献

- [1] Tsirogiannis G A, Douskos C N, Perdios E A. Ap&SS, 2006, 305: 389
- [2] Ruth R D. ITNS, 1983, 30: 2669
- [3] Wisdom J, Holman M, Touma J. Fields Institute Communications, 1996, 10: 217
- [4] Wisdom J, Holman M. AJ, 1991, 102: 1528
- [5] Forest E, Ruth R D. PhyD, 1990, 43: 105
- [6] Yoshida H. PhLA, 1990, 150: 262

- [7] Chin S A. PhRvE, 2007, 75: 036701
- [8] Sun W, Wu X, Huang G Q. RAA, 2011, 11: 353
- [9] Mei L J, Wu X, Liu F Y. ChPhL, 2012, 29: 050201
- [10] Liu L, Liao X H. CeMDA, 1994, 59: 221
- [11] Fukushima T. AJ, 2003, 126: 1097
- [12] Ma D Z, Wu X, Zhu J F. NewA, 2008, 13: 216
- [13] Wu X, Huang T Y, Wan X S, et al. AJ, 2007, 133: 2643
- [14] Fukushima T. AJ, 2003, 126: 2567
- [15] Ma D Z, Wu X, Liu F Y. IJMPC, 2008, 19: 1411
- [16] Fukushima T. AJ, 2003, 126: 3138
- [17] Fukushima T. AJ, 2004, 127: 3638
- [18] Ma D Z, Wu X, Zhong S Y. AJ, 2008, 687: 1294
- [19] Ma D Z, Wu X, Zhong S Y. RAA, 2009, 9: 1185
- [20] Zhong S Y, Liu S. AcPSn, 2012, 61: 120401
- [21] Wang Y Z, Wu X, Zhong S Y. AcPSn, 2012, 61: 160401
- [22] Zhong S Y, Wu X. AcPSn, 2011, 60: 090402
- [23] Wu X, Huang T Y. PhLA, 2003, 313: 77
- [24] Wu X, Huang T Y, Zhang H. PhRvD, 2006, 74: 083001
- [25] Huang G Q, Wu X. PhRvD, 2014, 89: 124034
- [26] Ma D Z, Wu J P, Zhang J F. PhRvD, 2014, 89: 086011
- [27] Huang G Q, Ni X T, Wu X. EPJC, 2014, 74: 3012
- [28] Huang T Y, Innanen K A. AJ, 1983, 88: 870
- [29] Chen Y L, Wu X. AcPSn, 2013, 62: 140501
- [30] Nacozy P E. Ap&SS, 1971, 14: 40

Research on the Stability of the Circular Restricted Three-body with Radiation and Oblateness

SHI Shao-wu MA Da-zhu

(*School of Information and Engineering, Hubei Minzu University, Enshi 445000*)

ABSTRACT The velocity scaling method based on the least squares theory is considered to be the most efficient, stable, and widely used method among all manifold correction methods. The stability of the restricted three-body problem where the larger primary is a source of radiation and the smaller companion is an oblate spheroid is discussed by using the velocity scaling method. The numerical simulations suggest that (1) the number of the chaotic orbits is increasing if only the oblate spheroid perturbation is considered; (2) the number of the regular orbits will be increased if only considering the radiation part; (3) when both the radiation and oblate spheroid perturbation exist, the action of the radiation plays a dominant role, and the probability of orderly motion of the system will be increased.

Key words celestial mechanics, Lyapunov exponents, chaos, circular restricted three-body problem